TVRZENÍ: X NLP, $Y \subset\subset X$, $\dim Y < \infty \Rightarrow Y$ je komplementovaný.

Důkaz
- $Y = \{0\} \Rightarrow$ je to triviální, $P: X \to Y$, $Px = 0, x \in X$, je spojitá projekce
- $Y \neq \{0\} \Rightarrow n := \dim Y \in \mathbb{N}$. Nechť $\{y_1, \dots, y_n\}$ je báze Y.

  Nechť $\{y_1^*, \dots, y_n^*\}$ je duální báze Y^*

  [tj. $y_j^*: Y \to \mathbb{F}$ lineární takové, že $y_j^*(x_i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$]

  $\dim Y < \infty \Rightarrow$ všechny lineární funkcionály jsou spojité.

  H-B věta $\Rightarrow$ ex. $x_j^* \in X^*$, že $x_j^* \restriction Y = y_j^*$ $(j = 1, \dots, n)$

  Definujme $P: X \to X$ předpisem $P(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j^*(x) \cdot y_j$

  Pak platí:
  - P je lineární a spojitý (protože $x_j^* \in X^*$ pro každé j)
  - $P(X) \subset Y$ ($\forall x \in X$ je Px lineární kombinace $y_1, \dots, y_n$, patří tedy do Y)
  - $P(y_i) = y_i$ pro každé i

    $\left[P(y_i) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{x_j^*(y_i)}_{y_i \in Y \,\Rightarrow\, = y_j^*(y_i) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}} y_j = 1 \cdot y_i = y_i \right]$

  - Tedy $Py = y$ pro $y \in Y$

  Závěr: P je spojitá lineární projekce X na Y, Y je tedy komplementovaný.

Tvrzení: X NLP, $Y \subset\subset X$ uzavřený, $\dim X/Y < \infty \Rightarrow Y$ komplementovaný

Dk:
- $Y = X \Rightarrow$ triviální (Identita je spojitá projekce)
- $Y \subsetneq X \Rightarrow n := \dim X/Y \in \mathbb{N}$.

  Nechť $\{z_1, \dots, z_n\}$ je báze X/Y

  Nechť $q: X \to X/Y$ je kanonické kvocientové zobrazení

  zvolme $x_1, \dots, x_n \in X$, aby $q(x_j) = z_j$ pro $j = 1, \dots, n$

  Pak jsou $x_1, \dots, x_n$ lineárně nezávislé

$\ulcorner$ $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow 0 = q(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 q(x_1) + \cdots + \alpha_n q(x_n)$

$= \alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n \underset{\substack{\uparrow \\ z_1, \dots, z_n \text{ jsou LN}}}{\Rightarrow} \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ $\lrcorner$

Tedy $E := \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ má dimenzi n

Zřejmě $q(E) = X/Y$ $\quad (q(x_i) = z_i)$

Navíc q je prosté ($\dim E = \dim X/Y = n$ & q je na)

Tedy q je lineární bijekce E na X/Y. Protože jde o prostory konečné dimenze, je to izomorfismus, tedy $T := (q|_E)^{-1} : X/Y \to E$ je spojité

Definujme $Px = x - T(q(x))$, $x \in X$

- P je zřejmě lineární zobrazení $X \to X$
- P je spojité (T i q jsou spojitá)
- $x \in Y \Rightarrow q(x) = 0 \Rightarrow Px = x - T(0) = x$
- $x \in X \Rightarrow Px \in Y$

$\ulcorner$ $Y = \ker q$, spočtěme tedy, že $q(Px) = 0$

$$q(Px) = q(x) - \underbrace{q(T(q(x)))}_{= q(x), \text{ protože } q \circ T = \mathrm{Id}_{X/Y}} = q(x) - q(x) = 0$$ $\lrcorner$

Tedy P je spojitá lineární projekce X na Y, Y je tedy komplementovaný.