III.2 Věty o otevřeném zobrazení a o uzavřeném grafu

Věta 8 (Banachova věta o otevřeném zobrazení). *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X,Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.*

Poznámky:

- Zobrazení mezi metrickými prostory je **otevřené**, pokud obraz každé otevřené množiny je otevřená množina. Stejná definice je použitelná i pro zobrazení mezi topologickými prostory.
- V předchozí větě je podstatný předpoklad úplnosti obou prostorů – X i Y.

Lemma 9. *Nechť X je Banachův prostor, Y normovaný lineární prostor, $T \in L(X,Y)$ a $r,s>0$. Pokud $U(\boldsymbol{o},s) \subset \overline{T(U(\boldsymbol{o},r))}$, pak $U(\boldsymbol{o},s) \subset T(U(\boldsymbol{o},r))$.*

Důsledek 10. *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X,Y)$ je prosté a na. Pak T^{-1} je spojité, tj. T je izomorfismus X na Y.*

Důsledek 11. *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X,Y)$ je na. Nechť $\widetilde{T} : X/\ker T \to Y$ je zobrazení popsané v Tvrzení 3. Pak $\widetilde{T}$ je izomorfismus $X/\ker T$ na Y.*

Lemma 12 (součin normovaných lineárních prostorů). *Nechť X a Y jsou normované lineární prostory. Na vektorovém prostoru $X \times Y$ definujme pro $p \in [1,\infty]$ normu $\|\cdot\|_p$ vzorcem*

$$\|(x,y)\|_p = (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p}, \quad (x,y) \in X \times Y \text{ pro } p \in [1,\infty),$$
$$\|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}, \quad (x,y) \in X \times Y.$$

Pak platí:

(a) *Pro každé $p \in [1,\infty]$ je $\|\cdot\|_p$ norma na $X \times Y$ a všechny tyto normy jsou ekvivalentní.*

(d) *Posloupnost $((x_n,y_n))$ konverguje v prostoru $X \times Y$ k bodu (x,y), právě když $x_n \to x$ v X a $y_n \to y$ v Y.*

(c) *Jsou-li X a Y úplné, je i $X \times Y$ úplný (s kteroukoli z norem $\|\cdot\|_p$).*

Věta 13 (věta o uzavřeném grafu). *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení, jehož graf je uzavřený v $X \times Y$. Pak T je spojité, tj. $T \in L(X,Y)$.*

Poznámky:

- **Grafem** zobrazení T rozumíme množinu

$$\{(x,y) \in X \times Y; y = Tx\}.$$

- $X \times Y$ uvažujeme s některou z norem popsaných v Lemmatu 12.
- Uzavřenost grafu zobrazení T je ekvivalentní podmínce

$$(x_n) \subset X, x_n \to x \in X, Tx_n \to y \in Y \Rightarrow y = Tx.$$

Poznámka: Je-li $T : X \to Y$ lineární zobrazení, je graf T lineární podprostor $X \times Y$. Je-li $T \in L(X,Y)$, je graf T uzavřeným podprostorem $X \times Y$. Věta 13 tedy říká, že za předpokladu úplnosti X a Y platí i opačná implikace. Je-li $T \in L(X,Y)$, je graf T izomorfní prostoru X.