Lemma: X Banachův prostor, Y NLP, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $r,s>0$. Pokud $U(0,s) \subset \overline{T(U(0,r))}$, pak $U(0,s) \subset T(U(0,r))$.

Dk: ① stačí to dokázat pro případ $r=s=1$

$\ulcorner$ Nechť to platí pro $r=s=1$. Nechť $r,s>0$ jsou libovolná a $U(0,s) \subset \overline{T(U(0,r))}$.

Položme $\tilde{T} := \frac{r}{s} T$. Pak $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X,Y)$ a

$$\overline{\tilde{T}(U(0,1))} = \overline{\frac{r}{s} T(U(0,1))} = \frac{1}{s}\overline{T(U(0,r))}$$

$$\supset \frac{1}{s} U(0,s) = U(0,1)$$

Tedy, dle předpokladu, $\tilde{T}(U(0,1)) \supset U(0,1)$, proto $T(U(0,r)) = \frac{s}{r}\tilde{T}(U(0,r)) = s\,\tilde{T}(U(0,1)) \supset \underbrace{s \cdot U(0,1)}_{U(0,s)}$ $\lrcorner$

② Nechť $U_Y \subset \overline{T(U_X)}$. Dokážeme $U_Y \subset T(U_X)$.

$\ulcorner$ Pozorování: $\forall c>0: \; c \cdot U_Y \subset \overline{T(c \cdot U_X)}$ $\quad (*)$

Zvolme $y \in U_Y$. Pak $\|y\|<1$. Zvolme $\delta>0$, aby $\|y\|<1-\delta$. Položme $z = \frac{y}{1-\delta}$. Pak $\|z\|<1$, tedy $z \in U_Y$

- $z \in U_Y \overset{(*)}{\Rightarrow}$ existuje $x_1 \in U_X$, že $\|z - Tx_1\| < \delta$
- $z - Tx_1 \in \delta U_Y \overset{(*)}{\Rightarrow} \exists x_2 \in \delta U_X$, že $\|z - Tx_1 - Tx_2\| < \delta^2$
- $z - Tx_1 - Tx_2 \in \delta^2 U_Y \Rightarrow \exists x_3 \in \delta^2 U_X$, že $\|z - Tx_1 - Tx_2 - Tx_3\| < \delta^3$

Atd. Indukcí sestrojíme posloupnost (x_n) takovou, že

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad x_n \in \delta^{n-1} U_X \quad a \quad \|z - Tx_1 - Tx_2 - \dots - Tx_n\| < \delta^n$$

Položme $x := \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ $\Big\lceil$ $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n-1} = \frac{1}{1-\delta}$

proto řada konverguje absolutně, protože X je úplný, řada konverguje a navíc $\|x\| \leq \frac{1}{1-\delta}$ $\Big\rfloor$

Máme tedy $x \in X$, $\|x\| < \frac{1}{1-\delta}$, pro který je $Tx = z$

$$\left(\|z - \sum_{j=1}^{n} Tx_j\| < \delta^n \longrightarrow 0 \right)$$

Pak $\|(1-\delta)x\| < 1$, tj. $(1-\delta)x \in U_X$ a $T((1-\delta)x) = (1-\delta)z = y$

Proto $y \in T(U_X)$ a důkaz je hotov. $\rfloor$

Věta o otevřeném zobrazení: X, Y Banachovy prostory, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, T je na $\Rightarrow$ T je otevřené zobrazení.

Důkaz:
- T je na $\Rightarrow T(X) = Y \Rightarrow T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} n \cdot U_X\right) = Y$

  $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} T(n \cdot U_X) = Y$.
- Y úplný $\Rightarrow$ z Baireovy věty plyne, že existuje $n \in \mathbb{N}$, pro které $T(n \cdot U_X)$ není řídká v Y, zvolme takové n.

  Pak $\operatorname{Int} \overline{T(nU_X)} \neq \emptyset$, tedy existují $y \in Y$ a $s > 0$, že $U(y, s) \subset \overline{T(nU_X)}$

  Protože $\overline{T(nU_X)}$ je symetrická množina, dostaneme i $U(-y, s) \subset \overline{T(nU_X)}$

Protože $\overline{T(nU_X)}$ je konvexní, dostaneme

$U(0,s) \subset \overline{T(nU_X)}$.

$\ulcorner U(0,s) \subset \mathrm{conv}(U(y,s) \cup U(-y,s)) \lrcorner$

Tedy z Lemmatu výše plyne (X je úplný!)

$U(0,s) \subset T(U(0,n))$

- Dokázali jsme $T(U(0,n)) \supset U(0,s)$

$\Rightarrow$ (díky linearitě T) $\forall r > 0 \; T(U(0,r)) \supset U(0, \frac{s}{n} r)$

$\Rightarrow \forall x \in X \; \forall r > 0 : T(U(x,r)) \supset U(Tx, \frac{s}{n} r)$,

tedy $\forall x \in X \; \forall r > 0 : Tx \in \mathrm{Int}\, T(U(x,r))$

- Z toho plyne, že T je otevřené zobrazení:

$G \subset X$ otevřená $\Rightarrow$ $T(G)$ otevřená v Y

$\ulcorner y \in T(G) \Rightarrow \exists x \in G : Tx = y$

G otevřená $\Rightarrow \exists r > 0 : U(x,r) \subset G$

Pak $T(U(x,r)) \subset T(G)$, přičemž

$y = Tx \in \mathrm{Int}\, T(U(x,r)) \subset \mathrm{Int}\, T(G)$

Proto je $T(G)$ otevřená. $\lrcorner$