X separabilní Banachův prostor $\Rightarrow$ X je izometrický podprostor ℓ^∞

Důkaz X separabilní $\Rightarrow$ $\exists\, (x_n)_{n=1}^\infty$ hustá posloupnost

Důsledek $\underline{\text{II}}.7$ $\Rightarrow$ $\forall n$ existuje $f_n \in X^*$, $\|f_n\| \le 1$, $f_n(x_n) = \|x_n\|$

Pro $x \in X$ položme $T(x) = (f_n(x))_{n=1}^\infty$

protože $\forall x \in X$ $\forall n \in \mathbb{N}$: $|f_n(x)| \le \|f_n\| \cdot \|x\| \le \|x\|$,

je $T(x)$ omezená posloupnost a $\|T(x)\|_\infty \le \|x\|$.

Je tedy $T: X \to \ell^\infty$, T je zřejmě lineární a $\|T\| \le 1$,

speciálně T je spojitý.

Navíc $\forall n \in \mathbb{N}$: $\|T(x_n)\| \ge |f_n(x_n)| = \|x_n\|$,

tedy $\|T(x_n)\| = \|(x_n)\|$.

Z toho plyne, že T je izometrie:

Uvažme množinu

$$\{x \in X;\ \|Tx\| = \|x\|\}$$

Protože T je spojitý, je uzavřená. Navíc obsahuje x_n pro každé $n \in \mathbb{N}$, je tedy zároveň hustá. Proto je rovna X.

A to je ono.