II.4 Slabá a slabá* konvergence

Definice. Nechť X je normovaný lineární prostor.

- Řekneme, že posloupnost (x_n) prvků X **slabě konverguje** k prvku $x \in X$, pokud
$$\forall f \in X^*\colon f(x_n) \to f(x).$$
Tuto skutečnost zapisujeme $x_n \xrightarrow{w} x$ nebo též $x_n \rightharpoonup x$. Bod x pak nazýváme **slabou limitou** posloupnosti (x_n).
- Řekneme, že posloupnost (f_n) prvků X^* **slabě* konverguje** k prvku $f \in X^*$, pokud
$$\forall x \in X\colon f_n(x) \to f(x).$$
Tuto skutečnost zapisujeme $f_n \xrightarrow{w^*} f$ nebo též $f_n \xrightarrow{*} f$. Prvek f pak nazýváme **slabou* limitou** posloupnosti (f_n).

Poznámky:

(1) Nechť X je normovaný lineární prostor. Každá posloupnost v X má nejvýše jednu slabou limitu. Každá posloupnost v X^* má nejvýše jednu slabou* limitu.

(2) Běžnou konvergenci v normovaném lineárním prostoru, tj. konvergenci v metrice generované normou, někdy nazýváme **normovou konvergencí**, **konvergencí v normě** nebo též **silnou konvergencí**.

(3) Nechť X je normovaný lineární prostor, (x_n) posloupnost prvků X a $x \in X$. Pak platí
$$x_n \to x \Rightarrow x_n \xrightarrow{w} x.$$
Opačná implikace obecně neplatí. Například posloupnost $(\boldsymbol{e}^n)$ kanonických jednotkových vektorů v prostoru ℓ^p pro $p \in (1, \infty)$ slabě konverguje k nule, ale nekonverguje k nule silně.

(4) Nechť X je normovaný lineární prostor, (f_n) posloupnost prvků X^* a $f \in X^*$. Pak platí
$$f_n \to f \Rightarrow f_n \xrightarrow{w} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{w^*} f.$$
Opačné implikace obecně neplatí:
- Nechť $X = \ell^p$, kde $p \in (1, \infty)$. Nechť (f_n) je posloupnost souřadnicových funkcionálů. Pak $f_n \xrightarrow{w} 0$ v $X^* = \ell^q$ (kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), ale posloupnost (f_n) nekonverguje silně.
- Nechť $X = c_0$. Nechť (f_n) je posloupnost souřadnicových funkcionálů. Pak $f_n \xrightarrow{w^*} 0$, ale posloupnost (f_n) nekonverguje slabě v $X^* = \ell^1$.

(5) Je-li X normovaný lineární prostor konečné dimenze, pak pro posloupnost (x_n) v X platí
$$x_n \to x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{w} x.$$
Existují i některé prostory nekonečné dimenze, v nichž tato ekvivalence platí, například ℓ^1 (což dokázal I. Schur v roce 1921).

(6) Je-li X reflexivní Banachův prostor, pak pro posloupnost (f_n) v X^* platí
$$f_n \xrightarrow{w^*} f \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{w} f.$$
Existují i některé nereflexivní prostory, v nichž tato ekvivalence platí, například ℓ^∞ (jak dokázal A. Grothendieck v roce 1953).

(7) Je-li X Banachův prostor nekonečné dimenze, pak existuje posloupnost (f_n) v X^* taková, že $\|f_n\| = 1$ pro každé n a přitom $f_n \xrightarrow{w^*} 0$. Tuto netriviální větu dokázali nezávisle B. Josefson a A. Nissenzweig v roce 1975.

Tvrzení 24. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y \subset\subset X$ jeho podprostor. Nechť (y_n) je posloupnost v Y a $y \in Y$. Pak*
$$y_n \xrightarrow{w} y \text{ v prostoru } Y \Leftrightarrow y_n \xrightarrow{w} y \text{ v prostoru } X.$$

Tvrzení 25. *Nechť X je normovaný lineární prostor.*

(a) Pokud $x_n \xrightarrow{w} x$ v X, pak $\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

(b) Pokud $f_n \xrightarrow{w^*} f$ v X^*, pak $\|f\| \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|$.

Tvrzení 26 (Mazurova věta). *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pokud $x_n \xrightarrow{w} x$ v X, pak existuje posloupnost (y_n) konvexních kombinací bodů $x_n, n \in \mathbb{N}$, která (silně) konverguje k x.*

Tvrzení 27 (princip stejnoměrné omezenosti). *Nechť X a Y jsou normované lineární prostory a $A \subset L(X, Y)$ je nějaká podmnožina. Pokud je množina*

$$\{x \in X;\ \{Tx; T \in A\} \text{ je omezená v } Y\}$$

druhé kategorie v prostoru X, pak je množina A omezená v $L(X, Y)$.

Důsledek 28. *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $A \subset L(X, Y)$. Pak následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*
(i) Množina A je omezená v $L(X, Y)$.
(ii) Pro každé $x \in X$ je množina $\{Tx; T \in A\}$ omezená v Y.

Důsledek 29 (omezenost a slabá omezenost). *Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$. Pak následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*
(i) Množina A je omezená v X.
(ii) Každé $f \in X^*$ je omezené na množině A.

Důsledek 30.
(a) Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak každá slabě konvergentní posloupnost v X je omezená.
(b) Nechť X je Banachův prostor. Pak každá slabě konvergentní posloupnost v X^* je omezená.*

Tvrzení 31. *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a (T_n) je posloupnost v $L(X, Y)$. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*
1. *Existuje takové $T \in L(X, Y)$, že $T_n(x) \to T(x)$ pro každé $x \in X$.*
2. *Posloupnost (T_n) je omezená v $L(X, Y)$ a existuje hustá podmnožina $D \subset X$, že pro každé $x \in D$ je posloupnost $(T_n(x))$ konvergentní v Y.*

Příklady 32.
1. *Nechť $X = c_0$ nebo $X = \ell^p$, kde $p \in (1, +\infty)$. Posloupnost $(\boldsymbol{x}^n)$ slabě konverguje k $\boldsymbol{x}$ v X, právě když je omezená v X a konverguje k $\boldsymbol{x}$ po souřadnicích, tj.*

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon x_k^n \to x_k.$$

2. *Nechť $X = c_0$ nebo $X = \ell^1$. Ztotožněme X^* s ℓ^1 nebo ℓ^∞ podle Věty 17. Pak posloupnost (f_n) slabě* konverguje k f v X^*, právě když je omezená v X a konverguje k f po souřadnicích.*

Věta 33. *Nechť X je separabilní Banachův prostor. Pak pro každou omezenou posloupnost v X^* existuje její slabě* konvergentní podposloupnost.*

Věta 34. *Nechť X je reflexivní Banachův prostor. Pak pro každou omezenou posloupnost v X existuje její slabě konvergentní podposloupnost.*

Poznámky:
1. Věta 33 pro neseparabilní Banachovy prostory obecně neplatí (například pro $X = \ell^1(\mathbb{R})$). Pro některé „pěkné“ neseparabilní prostory však platí (například pro $X = c_0(\Gamma)$).
2. Věta 34 platí stejně pro separabilní i neseparabilní prostor X. Důvod je ten, že se díky Tvrzení 24 můžeme omezit na separabilní případ.
3. Ve Větě 34 platí i obrácená implikace, tedy reflexivní prostory jsou charakterizovány tím, že každá omezená posloupnost má slabě konvergentní podposloupnost. To je důsledkem netriviální Eberlein-Šmulyanovy věty (ze čtyřicátých let dvacátého století).

Věta 35. *Nechť X je reflexivní Banachův prostor a $C \subset X$ je neprázdná uzavřená konvexní množina. Pak pro každé $x \in X$ existuje (alespoň jeden) bod $y \in C$ nejbližší k x, tj. takový, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C)$.*