Tvrdenie 31 X, Y Banachove priestory $(T_n) \subset \mathcal{L}(X,Y)$

NPJE:

(1) $\exists T \in \mathcal{L}(X,Y)$: $T_n x \to Tx$ pre $x \in X$

(2) Postupnosť (T_n) je ohraničená v $\mathcal{L}(X,Y)$ a existuje $D \subset X$ hustá, že $\forall x \in D$: $(T_n x)$ konverguje v Y

Dk: (1) $\Rightarrow$ (2)

$T_n x \to Tx \Rightarrow$ postupnosť $(T_n x)$ je ohraničená

Teda dľa Tvrdenia 27 je post. (T_n) ohraničená v $\mathcal{L}(X,Y)$

Navyše môžeme vziať $D = X$

(2) $\Rightarrow$ (1)

Nech $C > 0$ je taká, že $\forall n \in \mathbb{N}$: $\|T_n\| \le C$

a D je onaa hustá množina

- Ukážeme, že pre každé $x \in X$ je postupnosť $(T_n x)$ cauchyovská

Zvoľme $x \in X$. Nech $\varepsilon > 0$

Potom existuje $y \in D$: $\|y - x\| < \frac{\varepsilon}{3C}$

$(T_n y)$ je konvergentná, teda cauchyovská, teda existuje n_0 $\forall m, n \ge n_0$: $\|T_m y - T_n y\| < \frac{\varepsilon}{3}$

potom pre $m, n \ge n_0$ je

$\|T_m x - T_n x\| \le \|T_m (x - y)\| + \|T_m y - T_n y\|$

$+ \|T_n (y - x)\| \le C \cdot \|x - y\| + \frac{\varepsilon}{3} + C \cdot \|y - x\| < \varepsilon$

Teda, keďže úplnosti Y môžeme definovať

$Tx = \lim_{n \to \infty} T_n x$, $x \in X$. Zrejme T je lineárne

a $\|T\| \le C$

Věta 33 : X separabilní Banachův prostor, $(f_n) \subset X^*$ omezená

$\Rightarrow$ existuje vybraná (f_{n_k}) slabě* - konvergentní

Důkaz: • X separabilní $\Rightarrow$ existuje spočetná hustá množina. $\{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ buď nějaká hustá množina v X

• $(f_n) \subset X^*$ buď omezená posloupnost. Pak:

$(f_n(x_1))$ je omezená posloupnost v $\mathbb{F}$ $\Rightarrow$ existuje vybraná konvergentní (Bolzano - Weierstrass)

$(f_n^1(x_1))$ buď vybraná konvergentní.

Dále, $(f_n^1(x_2))$ je omezená posloupnost v $\mathbb{F}$ $\Rightarrow$ existuje vybraná konvergentní $(f_n^2(x_2))$

Podobně, $(f_n^2(x_3))$ je omezená posloupnost v $\mathbb{F}$ $\Rightarrow$ existuje vybraná konvergentní $(f_n^3(x_3))$

Atd. indukcí sestrojíme posloupnosti $(f_n^k)_{n=1}^\infty$ pro $k \in \mathbb{N}$ takové, že

(i) (f_n^1) je vybraná z (f_n)

(ii) $(f_n^{k+1})_{n=1}^\infty$ je vybraná z $(f_n^k)_{n=1}^\infty$ pro $k \in \mathbb{N}$

(iii) $(f_n^k(x_k))_{n=1}^\infty$ konverguje pro $k \in \mathbb{N}$.

Uvažme posloupnost $(f_n^n)_{n=1}^\infty$. Pak platí:

• (f_n^n) je vybraná z (f_n)

• $\forall k \in \mathbb{N}$: $(f_n^n(x_k))_{n=k}^\infty$ je vybraná z $(f_n^k(x_k))_{n=1}^\infty$, a tedy $(f_n^n(x_k))$ je konvergentní.

Aplikujeme nyní T31 (2)$\Rightarrow$(1) na X, $Y = \mathbb{F}$, $T_n = f_n^n$ a $D = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ a dostaneme, že (f_n^n) je slabě* konvergentní.

Věta 34 X reflexivní Banachův prostor, $(x_n) \subset X$ omezená posloupnost $\Rightarrow$ existuje vybraná (x_{n_k}), která je slabě konvergentní

Důkaz: **Krok 1:** BÚNO X separabilní

⌈ Předpokládejme, že to víme pro případ, že X je separabilní.
Nechť X je reflexivní a $(x_n) \subset X$ omezená posloupnost.
Položme $Y = \overline{\operatorname{span}} \{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$. Pak Y je separabilní a reflexivní (Věta 13(3)). Z předpokladu plyne, že existuje vybraná (x_{n_k}) slabě konvergentní v Y. Podle T24 je slabě konvergentní i v X. ⌋

Krok 2: Z NLP, Z^* separabilní $\Rightarrow$ Z separabilní.

⌈ Z^* separabilní $\Rightarrow \exists (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost hustá v S_{Z^*}
pro $n \in \mathbb{N}$ najdeme $z_n \in S_Z$ ($\|z_n\| = 1$) splňující $|\varphi_n(z_n)| > \frac{1}{2}$.
(To plyne z definice normy funkcionálu, protože $\|\varphi_n\| = 1$.)
Položme $Y := \overline{\operatorname{span}} \{z_n ; n \in \mathbb{N}\}$. Pak Y je separabilní.
Stačí dokázat, že $Y = Z$. Kdyby ne, zvolme $z \in Z \setminus Y$.
Z Věty 9 plyne, že existuje $\varphi \in Z^*$, $\|\varphi\| = 1$, $\varphi|_Y = 0$, $\varphi(z) \neq 0$
Protože $\varphi \in S_{Z^*}$, existuje $n \in \mathbb{N}$, pro které je $\|\varphi_n - \varphi\| < \frac{1}{4}$.
Pak
$$\frac{1}{2} < |\varphi_n(z_n)| = |\varphi_n(z_n) - \underbrace{\varphi(z_n)}_{\substack{=0\text{, protože} \\ z_n \in Y \text{ a } \varphi|_Y = 0}}| \leq \|\varphi_n - \varphi\| \cdot \underbrace{\|z_n\|}_{=1} < \frac{1}{4}\text{, spor.}$$ ⌋

Krok 3: Důkaz pro X separabilní.

⌈ X separabilní a reflexivní, $(x_n) \subset X$ omezená posloupnost.
$\varkappa : X \to X^{**}$ buď kanonické vnoření.

X reflexivní $\Rightarrow \varkappa(X) = X^{**}$, tedy X^{**} je též separabilní – z kroku 2 plyne, že i X^* je separabilní.

Pak $(\varkappa(x_n))$ je omezená posloupnost v X^{**}.

Dle Věty 34 existuje vybraná $(\varkappa(x_{n_k}))$ slabě* konvergující k nějakému $F \in X^{**}$. Protože X je reflexivní, existuje $x \in X$, že $\varkappa(x) = F$.

Máme tedy $\varkappa(x_{n_k}) \xrightarrow{w^*} \varkappa(x)$ v X^{**}.

Ale to znamená přesně, že $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$ v X. $\lrcorner$

Věta 35 X reflexivní Banachův prostor, $C \subset X$ neprázdná konvexní uzavřená. Pak $\forall x \in X \; \exists y \in C$ nejbližší bod k x.

Důkaz: $c := \operatorname{dist}(x, C)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolme $y_n \in C$ splňující $\|y_n - x\| < c + \frac{1}{n}$. Pak platí:

- (y_n) je omezená posloupnost

$$\left[\, \|y_n\| \le \|y_n - x\| + \|x\| < c + \frac{1}{n} + \|x\| \le c + 1 + \|x\| \,\right]$$

- Věta 34 $\Rightarrow$ existuje (y_{n_k}) vybraná, $y_{n_k} \xrightarrow{w} y$ pro nějaké $y \in X$
- T26 $\Rightarrow$ $y \in \overline{\operatorname{conv}}\{y_{n_k};\, k \in \mathbb{N}\} \underset{y_{n_k} \in C}{\subset} \overline{\operatorname{conv}}\, C \underset{C \text{ uzavřená konvexní}}{=} C$

- Navíc $y_{n_k} - x \xrightarrow{w} y - x$, a tedy

$$c \underset{y \in C}{\le} \|y - x\| \underset{T25(a)}{\le} \liminf \underbrace{\|y_{n_k} - x\|}_{< c + \frac{1}{n_k}} \le \liminf \left(c + \frac{1}{n_k}\right) \underset{n_k \to \infty}{=} c$$

Tedy $y \in C$ a $\|y - x\| = c = \operatorname{dist}(x, C)$, y je tudíž nejbližší bod.