Připomenutí: Nechť M je metrický prostor a $A \subset M$.

- A je řídká, pokud $\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset$.
- A je 1. kategorie, pokud existují $A_n \subset M$ řídké takové, že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$
- A je 2. kategorie, pokud není 1. kategorie

Baireova věta: M úplný metrický prostor $\Rightarrow$ M je 2. kategorie (v sobě).

Tvrzení 27 (PRINCIP STEJNOMĚRNÉ OMEZENOSTI)
X, Y nechť jsou NLP a $A \subset L(X, Y)$. Pokud je množina
$$B = \{x \in X;\ \{Tx,\ T \in A\} \text{ je omezená v } Y\}$$
2. kategorie v X, pak množina A je omezená v $L(X,Y)$.

Důkaz: Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme
$$B_n = \{x \in X;\ \forall T \in A : \|Tx\| \le n\}$$

Pak zřejmě platí $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Protože B je 2. kategorie, existuje $n \in \mathbb{N}$, pro které B_n není řídká. Zvolme takové n. Protože B_n je uzavřená (jelikož operátory $T \in A$ jsou spojité na X), platí $\operatorname{Int} B_n \neq \emptyset$.

Tedy existuje $x_0 \in X$ a $r > 0$ takové, že $U(x_0, r) \subset B_n$.
To znamená, že
$$\forall T \in A\ \forall x \in U(x_0, r) : \|Tx\| \le n$$

Nyní zvolme $x \in U_X$ libovolné.
$$\text{Pak } x_0 + rx \in U(x_0, r), \text{ a tedy}$$

$$\|Tx\| = \left\| \frac{T(x_0 + rx) - T(x_0)}{r} \right\| \le \frac{1}{r}\Big(\underbrace{\|T(x_0+rx)\|}_{\le n,\ \text{protože } x_0+rx \in U(x_0, r)} + \overbrace{\|T(x_0)\|}^{\le n,\ \text{protože } x_0 \in U(x_0,r)}\Big) \le \frac{2n}{r}$$

Tedy $\forall T \in A\ \forall x \in U_X : \|Tx\| \le \frac{2n}{r}$, proto $\forall T \in A : \|T\| \le \frac{2n}{r}$,
tedy A je omezená v $L(X,Y)$.

Důsledek 28 X Banachův, Y NLP, $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. NPJE:
(i) $\mathcal{A}$ je omezená v $\mathcal{L}(X,Y)$
(ii) $\forall x \in X$: $\{Tx,\ T \in \mathcal{A}\}$ je omezená v Y

Důkaz: (i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $\mathcal{A}$ je omezená v $\mathcal{L}(X,Y)$. Pak existuje $C > 0$ takové, že pro každé $T \in \mathcal{A}$ platí $\|T\| \le C$.
Nechť $x \in X$ je libovolné. Pak pro každé $T \in \mathcal{A}$ platí $\|Tx\| \le \|T\| \cdot \|x\| \le C \cdot \|x\|$. Tedy $\{Tx,\ T \in \mathcal{A}\}$ je omezená.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Použijeme Tvrzení 27. Platí-li (ii), pak v označení z T27 máme $B = X$. Protože X je úplný, je 2. kategorie, a tedy z T27 plyne, že $\mathcal{A}$ je omezená.

Důsledek 29 Nechť X je NLP a $A \subset X$. NPJE:
(i) A je omezená
(ii) $\forall f \in X^*$: f je omezená na A

Důkaz: Ukážeme, že jde o speciální případ Důsledku 28.
Nechť $\varkappa : X \to X^{**}$ je kanonické vnoření.

Aplikujeme D28 na prostor X^* (na místo X) – ten je Banachův, $Y = \mathbb{F}$ a množinu $\varkappa(A) \subset \mathcal{L}(X^*, \mathbb{F}) = X^{**}$

Přitom platí: A je omezená v $X \iff \varkappa(A)$ je omezená v $\mathcal{L}(X^*, \mathbb{F})$
[protože $\varkappa$ je izometrie]

a také: pro $f \in X^*$ libovolné:
f je omezené na $A \iff \{T(f),\ T \in \varkappa(A)\}$ je omezená
[$\{T(f),\ T \in \varkappa(A)\}$ je omezená $\iff \exists C > 0\ \forall x \in A : |\underbrace{\varkappa(x)(f)}_{=f(x)}| \le C$
$\iff \exists C > 0\ \forall x \in A : |f(x)| \le C \iff f$ omezené na A.]

Tedy podmínky (i) a (ii) v D29 jsou ekvivalentní podmínkám (i) a (ii) v D28 (pro X^*, $\mathbb{F}$, $\varkappa(A)$).
Tedy D29 plyne z D28

<u>Důsledek 30</u>: (a) X NLP $\Rightarrow$ každá slabě konvergentní posloupnost je omezená
(b) X Banachův $\Rightarrow$ každá slabě* konvergentní posloupnost v X^* je omezená.

<u>Důkaz</u>: (a) Nechť $x_n \xrightarrow{w} x$ v X. Pak $\forall f \in X^*: f(x_n) \to f(x)$.
Tedy pro každé $f \in X^*$ je posloupnost $(f(x_n))$ omezená.
podle D29 aplikovaného na $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost (x_n) omezená

(b) Nechť $f_n \xrightarrow{w^*} f$. Pak $\forall x \in X: f_n(x) \to f(x)$
Tedy pro každé $x \in X$ je posloupnost $(f_n(x))$ omezená.
Z D28 aplikovaného na X, $Y = \mathbb{F}$ a $A = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$
plyne, že posloupnost (f_n) je omezená.

<u>Poznámka</u>: Předpoklad úplnosti v D30 (b) je podstatný.
Nechť například $X = (c_{00}, \|\cdot\|_p)$, kde c_{00} je prostor všech číselných posloupností, které jsou od jistého členu dále nulové, a $p \in [1, \infty]$.

Nechť $f_n \in X^*$ je definováno vzorcem $f_n((x_k)_{k=1}^{\infty}) = n \cdot x_n$
Pak $\|f_n\| = n$, a přitom $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ v X^*.