K buď kompaktní metrický (Hausdorffův kompaktní topologický) prostor.
Pro $\mu \in \mathcal{M}(K,\mathbb{F})$ definujeme $\Phi_\mu : C(K,\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$

$$\Phi_\mu(f) = \int_K f \, d\mu, \quad f \in C(K,\mathbb{F})$$

1. krok $\Phi_\mu \in C(K,\mathbb{F})^*$, $\|\Phi_\mu\| \le \|\mu\|$, $\mu \mapsto \Phi_\mu$ je lineární

f omezená, μ ~~měřit~~ konečná $\Rightarrow$ integrál konverguje.

$$|\Phi_\mu(f)| = \left|\int_K f \, d\mu\right| \le \int_K |f| \, d|\mu| \le \int_K \|f\|_\infty \, d|\mu| = \|f\|_\infty |\mu|(K) = \|f\|_\infty \|\mu\|$$

linearita je zřejmá, zároveň plyne $\|\Phi_\mu\| \le \|\mu\|$

2. krok $\|\Phi_\mu\| = \|\mu\|$

Stačí $\ge$: Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Z definice $|\mu|$ plyne, že existují $B_1, \dots, B_n \subset K$ borelovské disjunktní, že $\sum_{j=1}^n |\mu(B_j)| > \|\mu\| - \varepsilon$

Z regularity μ existují $F_j \subset B_j$ uzavřené, že

$$\sum_{j=1}^n |\mu(F_j)| > \|\mu\| - \varepsilon$$

Z Lemmatu 22(a) plyne, že existují $U_1, \dots, U_n \subset K$ otevřené disjunktní, že $F_j \subset U_j$ pro $j = 1..n$

Z Lemmatu 22(b) plyne existence $g_j : K \to [0,1]$ spojité, že $g_j|_{F_j} = 1$, $\operatorname{spt} g_j \subset U_j$

Zvolme $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $|\alpha_j| = 1$, $\alpha_j \mu(B_j) = |\mu(B_j)|$

$$f := \sum_{j=1}^n \alpha_j g_j \Rightarrow f \in C(K,\mathbb{F}), \ \|f\|_\infty = 1.$$

$$|\Phi_\mu(f)| = \left|\int_K \sum_{j=1}^n \alpha_j g_j \, d\mu\right| = \left|\sum_{j=1}^n \alpha_j \int_{U_j} g_j \, d\mu\right| \ge$$

$$\ge \left|\sum_{j=1}^n \alpha_j \int_{F_j} g_j \, d\mu\right| - \left|\sum_{j=1}^n \alpha_j \int_{U_j \setminus F_j} g_j \, d\mu\right| \ge \underbrace{\sum_{j=1}^n |\mu(F_j)|}_{> \|\mu\| - \varepsilon} - \underbrace{\sum_{j=1}^n |\mu|(U_j \setminus F_j)}_{< \varepsilon}$$

$$> \|\mu\| - \varepsilon - \left(\sum_{j=1}^n (|\mu(F_j)| + |\mu|(U_j \setminus F_j))\right) + \sum_{j=1}^n |\mu(F_j)|$$

$$> \|\mu\| - \varepsilon - \|\mu\| + \|\mu\| - \varepsilon = \|\mu\| - 2\varepsilon.$$

3. krok Φ je na

$\boxed{3.1}$ Nechť $\varphi \in C(K,\mathbb{F})^*$. $\quad C_+(K) := \{ f \in C(K,\mathbb{F}) ;\ f \geq 0 \}$

Pro $f \in C_+(K)$ označme $\quad \Lambda(f) = \sup\{ |\varphi(g)| ;\ g \in C(K,\mathbb{F}),\ |g| \leq f \}$

Potom platí:

(i) $\Lambda(0) = 0$, $\quad 0 \leq f \leq g \Rightarrow \Lambda(f) \leq \Lambda(g)$

(ii) $\Lambda(f) \leq \|\varphi\| \cdot \|f\|_\infty$

(iii) $\Lambda(cf) = c\,\Lambda(f)$ pro $f \in C_+(K)$, $c \geq 0$

(iv) $\Lambda(f+g) = \Lambda(f) + \Lambda(g)$ pro $f, g \in C_+(K)$.

[(i) jasné

(ii) $|g| \leq f \Rightarrow |\varphi(g)| \leq \|\varphi\| \, \|g\|_\infty \leq \|\varphi\| \cdot \|f\|_\infty$

(iii) snadno z vlastností suprema

(iv) $\geq$: $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ ex. $h_1, h_2 \in C(K,\mathbb{F})$ $\quad |h_1| \leq f,\ |h_2| \leq g$

$|\varphi(h_1)| > \Lambda(f) - \varepsilon$, $\quad |\varphi(h_2)| > \Lambda(g) - \varepsilon$

Nechť $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $|\alpha_1| = |\alpha_2| = 1$, $\quad \alpha_j \varphi(h_j) = |\varphi(h_j)|$

$h := \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 \Rightarrow h \in C(K,\mathbb{F})$, $\quad |h| \leq |h_1| + |h_2| \leq f + g$

$|\varphi(h)| = |\varphi(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2)| = |\alpha_1 \varphi(h_1) + \alpha_2 \varphi(h_2)| =$

$= |\varphi(h_1)| + |\varphi(h_2)| > \Lambda(f) + \Lambda(g) - 2\varepsilon$

Tedy $\Lambda(f+g) > \Lambda(f) + \Lambda(g) - 2\varepsilon$

ε libovolné $\Rightarrow \Lambda(f+g) \geq \Lambda(f) + \Lambda(g)$

$\leq$: Nechť $h \in C(K,\mathbb{F})$, $|h| \leq f+g$

$$h_1(t) := \begin{cases} h(t) \cdot \dfrac{f(t)}{f(t)+g(t)}, & f(t)+g(t) > 0 \\ 0, & f(t)+g(t) = 0 \end{cases} \qquad h_2(t) = \begin{cases} h(t) \cdot \dfrac{g(t)}{f(t)+g(t)} \\ 0 \end{cases}$$

Pak h_1, h_2 jsou spojité na K.

[pro h_1: zřejmě je spojitá v každém bodě otevřené množiny $\{ x : f(x)+g(x) > 0 \}$

zvolme x, že $f(x)+g(x) = 0$. Pak i $h(x) = 0$,

$\lim\limits_{\substack{y \to x \\ f(y)+g(y) > 0}} h(y) \cdot \dfrac{f(y)}{g(y)+f(y)} = 0 \quad$ („nula · omezená“)]

$|h_1| \leq f$, $|h_2| \leq g$, $\quad h = h_1 + h_2$

$\Rightarrow |\varphi(h)| = |\varphi(h_1) + \varphi(h_2)| \leq |\varphi(h_1)| + |\varphi(h_2)| \leq \Lambda(f) + \Lambda(g)$

Tedy ~~$\Lambda(f+g)$~~ $\Lambda(f+g) \leq \Lambda(f) + \Lambda(g)$.]

$\boxed{3.2}$ Λ lze jednoznačně rozšířit na lineární funkcionál na $C(K,\mathbb{F})$

- na $C(K,\mathbb{R})$: $\Lambda_R(f) = \Lambda(f^+) - \Lambda(f^-)$

$\Lambda_R(cf) = c\Lambda_R(f)$ pro $c \geq 0$ plyne z (iii)
pro $c=-1$ jasné

$\Lambda_R(f+g) = \Lambda_R(f) + \Lambda_R(g)$

[$f_1, f_2, g_1, g_2 \in C^+(K)$, $f_1 - f_2 = g_1 - g_2$

$\Rightarrow \Lambda(f_1) - \Lambda(f_2) = \Lambda(g_1) - \Lambda(g_2)$
... plyne to z (iv)

$f+g = (f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ + g^+ - f^- - g^-$

$\Rightarrow \Lambda_R(f+g) = \Lambda((f+g)^+) - \Lambda((f+g)^-) = \Lambda(f^+ + g^+) - \Lambda(f^- + g^-)$
$= \Lambda(f^+) - \Lambda(f^-) + \Lambda(g^+) - \Lambda(g^-) = \Lambda(f) + \Lambda(g)$]

- na $C(K,\mathbb{C})$ .. $\Lambda_C(f) = \Lambda_R(\mathrm{Re}\, f) + i\Lambda_R(\mathrm{Im}\, f)$

$\boxed{3.3.}$ Λ_F je nezáporný lineární funkcionál na $C(K,\mathbb{F})$, dle Věty II.2.7 existuje μ nezáporná Regulární borel. míra na K, že

$$\Lambda_F(f) = \int_K f \, d\mu \quad , f \in C(K,\mathbb{F})$$

$\boxed{3.4}$ Uvazimo $C(K, \mathbb{F})$ s normo $\| \|_1$ z $L^1(\mu)$, tj. $\|f\|_1 = \int_K |f| d\mu$

Pak φ je spojit funkcional na $(C(K,\mathbb{F}), \|\cdot\|_1)$:

$$|\varphi(f)| \leq \Lambda(|f|) = \int_K |f| d\mu = \|f\|_1 \text{, tj. zato } \|\varphi\| \leq 1$$

Z H-B izrek lze φ razširiti na funkcional $L^1(\mu)^*$ norme ≤ 1,

torej z izrek II.19(5) obstaja $g \in L^\infty(\mu)$, $\|g\|_\infty \leq 1$

$$\varphi(f) = \int_K fg \, d\mu, \quad f \in L^1(\mu)$$

Označimo $\nu(A) = \int_A g \, d\mu$, A borelova $\subset K$ $\Rightarrow$ ν je borelova mera na K
$\nu \ll \mu \Rightarrow \nu$ regularna

Pri tem $\Phi_\nu(f) = \int_K f d\nu = \int_K fg \, d\mu = \varphi(f)$. Torej $\Phi_\nu = \varphi$.