Důkaz Věty II.17 (duály k $\ell^p(\Gamma)$ a $c_0(\Gamma)$).

1. krok Φ_g je dobře definovaný (tj. ona řada konverguje), Φ_g je lineární funkcionál, $\|\Phi_g\| \le \|g\|$

(a) $\forall F \subset \Gamma$ konečnou platí

$$\sum_{\gamma\in F}|f(\gamma)g(\gamma)| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Hölderova nerovnost}}}{\le} \Big(\sum_{\gamma\in F}|f(\gamma)|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{\gamma\in F}|g(\gamma)|^q\Big)^{1/q} \le \|f\|_p\cdot\|g\|_q$$

Tedy $\sum_{\gamma\in\Gamma}|f(\gamma)g(\gamma)| \le \|f\|_p\|g\|_q$ (přechodem k supremu)

$\Rightarrow$ řada konverguje absolutně, tedy konverguje (Tvrzení I.29 (b))

$\Rightarrow$ Φ_g je dobře definovaný, linearita Φ_g je zřejmá,

$$|\Phi_g(f)| = \Big|\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)g(\gamma)\Big| \le \sum_{\gamma\in\Gamma}|f(\gamma)g(\gamma)| \le \|f\|_p\|g\|_q$$

tj. $\|\Phi_g\| \le \|g\|_q$

(b) $\forall F \subset \Gamma$ konečnou platí

$$\sum_{\gamma\in F}|f(\gamma)g(\gamma)| \le \max_{\gamma\in F}|g(\gamma)|\cdot\sum_{\gamma\in F}|f(\gamma)| \le \|g\|_\infty\cdot\|f\|_1$$

$\Rightarrow$ $\sum_{\gamma\in\Gamma}|f(\gamma)g(\gamma)| \le \|g\|_\infty\cdot\|f\|_1$

Dále stejně jako v (a): Φ_g je dobře def. lin. funkcionál na $\ell_1(\Gamma)$

$\|\Phi_g\| \le \|g\|_\infty$

(c) Ukáže se stejně jako (b), jen se prohodí role f a g.

2. krok $\|\Phi_g\| = \|g\|$, tedy Φ je lineární izometrie do.

- Linearita Φ je zřejmá, díky 1. kroku stačí ukázat $\|\Phi_g\| \geq \|g\|$

(a) $g \in \ell^q(\Gamma)$ dáno.

Definujme $f(\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{, pokud } g(\gamma)=0 \\ \dfrac{|g(\gamma)|^q}{g(\gamma)\cdot\|g\|_q^{q-1}} & \text{, pokud } g(\gamma)\neq 0 \end{cases}$

- Pokud $g=0$, pak zřejmě $\Phi_g = 0$, tedy $\|\Phi_g\| = \|g\|_q$
- $g \neq 0 \Rightarrow$

$$\|f\|_p^p = \sum_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma)|^p = \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ g(\gamma)\neq 0}} \frac{|g(\gamma)|^{pq}}{|g(\gamma)|^p\,\|g\|_q^{p(q-1)}} = \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ g(\gamma)\neq 0}} \frac{|g(\gamma)|^{p(q-1)}}{\|g\|_q^{p(q-1)}} =$$

$$\left[\, p(q-1) = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{q}}\right)\cdot(q-1) = q \,\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} = \displaystyle\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ g(\gamma)\neq 0}} \frac{|g(\gamma)|^q}{\|g\|_q^q} = 1 \quad \Rightarrow \quad \|f\|_p = 1 \\ \Phi_g(f) = \displaystyle\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ g(\gamma)\neq 0}} \frac{|g(\gamma)|^q}{\|g\|_q^{q-1}} = \|g\|_q \end{array}\right\} \Rightarrow \|\Phi_g\| \geq \|g\|_q$$

(b) $g \in \ell^\infty(\Gamma)$ dáno. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\gamma\in\Gamma$: $|g(\gamma)| > \|g\|_\infty - \varepsilon$

Pak $e_\gamma \in \ell_1(\Gamma)$, $\|e_\gamma\|_1 = 1$, $|\Phi_g(e_\gamma)| = |g(\gamma)| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon$

Tedy $\|\Phi_g\| \geq \|g\|_\infty$

(c) $g \in \ell^1(\Gamma)$ dáno. Pokud $g = 0$, je to jasné. Pokud $g \neq 0$, zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje $F \subset \Gamma$ konečná, že $\sum_{\gamma\in F} |g(\gamma)| > \|g\|_1 - \varepsilon$.

Definujme $f(\gamma) = \begin{cases} \dfrac{|g(\gamma)|}{g(\gamma)} & \text{, } \gamma\in F,\ g(\gamma)\neq 0 \\ 0 & \text{, jinak} \end{cases}$

Pak $f \in c_0(\Gamma)$, $\|f\| = 1$ (přesněji $\|f\| \leq 1$, může být 0, pro ε velké)

$$\Phi_g(f) = \sum_{\gamma\in F} |g(\gamma)| > \|g\|_1 - \varepsilon$$

Tedy $\|\Phi_g\| \geq \|g\|_1$

3. krok Φ je na

(a) $\varphi \in (\ell^p(\Gamma))^*$ … definujme $g(\gamma) = \varphi(e_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$.

Tvrdím, že $g \in \ell^q(\Gamma)$, $\varphi = \Phi_g$

Γ $F \subset \Gamma$ konečná

$\Rightarrow$ pro $f \in \ell^p(F)$ nechť $\tilde{f}(\gamma) = \begin{cases} f(\gamma) & \gamma \in F \\ 0 & \gamma \in \Gamma \setminus F \end{cases}$ $\Rightarrow \tilde{f} \in \ell^p(\Gamma)$, $\|\tilde{f}\|_p = \|f\|_p$

Definujme $\varphi_F : \ell^p(F) \to \mathbb{F}$ předpisem

$$\varphi_F(f) = \varphi(\tilde{f}), \quad f \in \ell^p(F)$$

Pak $\varphi_F(f) = \sum_{\gamma \in F} f(\gamma) g(\gamma)$ (z linearity), tedy z kroku 1 a 2

aplikovaných na $\ell^p(F)$ plyne, že

$$\|\varphi_F\| = \left(\sum_{\gamma \in F} |g(\gamma)|^q\right)^{1/q}$$

Protože $\|\varphi_F\| \le \|\varphi\|$, dostáváme $\left(\sum_{\gamma \in F} |g(\gamma)|^q\right)^{1/q} \le \|\varphi\|$

Protože to platí pro každou $F \subset \Gamma$ konečnou, dostáváme $\left(\sum_{\gamma \in \Gamma} |g(\gamma)|^q\right)^{1/q} \le \|\varphi\|$, tj. $g \in \ell^q(\Gamma)$, $\|g\|_q \le \|\varphi\|$

Tedy dle kroku 1 je $\Phi_g \in \ell^p(\Gamma)^*$. Z linearity plyne, že $\Phi_g(f) = \varphi(f)$ pro ty f, které mají jen konečně mnoho nenulových souřadnic. Tyto prvky jsou hustá v $\ell^p(\Gamma)$, tedy $\Phi_g = \varphi$.

(b) a (c) se dokáže zcela analogicky.

Důkaz důsledku 18. (pro $p \in (1,\infty)$ je $\ell^p(\Gamma)$ reflexivní)

$p \in (1,\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $\Phi : \ell^q(\Gamma) \to (\ell^p(\Gamma))^*$ z Věty 21 (a)

$\xi \in \ell^p(\Gamma)^{**} \Rightarrow \xi \circ \Phi \in (\ell^q(\Gamma))^* \Rightarrow$ z Věty 21(a) aplikované na q

existuje $g \in \ell^p(\Gamma)$, že pro $f \in \ell^q(\Gamma)$ je $(\xi \circ \Phi)(f) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) g(\gamma)$

Tj. $\xi(\Phi_f) = \Phi_f(g)$, $f \in \ell^q(\Gamma)$

$$\Rightarrow \xi = \varkappa(g).$$