I. Banachovy a Hilbertovy prostory
I.1 Základní značení, pojmy a příklady

Značení:
$\mathbb{R}$ … těleso reálných čísel
$\mathbb{C}$ … těleso komplexních čísel
$\mathbb{F}$ … těleso $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$
Je-li X vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, nulový vektor značíme $\boldsymbol{o}$ (a někdy také 0).
Je-li X vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, $Y \subset\subset X$ znamená, že Y je podprostor X.

Definice. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$. Zobrazení $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$ se nazývá **norma** na X, pokud pro každé $x, y \in X$ a $\lambda \in \mathbb{F}$ platí:
(i) $\|x\| = 0$ právě když $x = \boldsymbol{o}$.
(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (**homogenita**)
(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (**trojúhelníková nerovnost**)
Je-li $\|\cdot\|$ norma na X, říkáme, že dvojice $(X, \|\cdot\|)$ je **normovaný lineární prostor nad** $\mathbb{F}$.

Poznámky: (1) Normovaný lineární prostor nad $\mathbb{R}$ se nazývá **reálný normovaný lineární prostor**; normovaný lineární prostor nad $\mathbb{C}$ se nazývá **komplexní normovaný lineární prostor**. Říkáme-li pouze **normovaný lineární prostor**, myslíme tím buď reálný nebo komplexní normovaný lineární prostor.
(2) Je-li norma na X dána a nehrozí nedorozumění, říkáme, že X je normovaný lineární prostor.

Větička 1. *Je-li $(X, \|\cdot\|)$ normovaný lineární prostor, pak zobrazení $\rho : X \times X \to [0, +\infty)$ definované předpisem*

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X,$$

je metrika na X. Říká se jí **metrika indukovaná normou**.

Poznámky: (1) Každý normovaný lineární prostor je tedy zároveň metrickým prostorem. Proto můžeme mluvit o otevřených a uzavřených množinách, omezených množinách, kompaktních množinách, konvergenci posloupností, spojitosti zobrazení, hustých podmnožinách, separabilitě atp. Všechny tyto pojmy uvažujeme vzhledem k metrice indukované normou.
(2) Každý normovaný lineární prostor je zároveň vektorovým prostorem. Proto můžeme mluvit o podprostorech, konvexních podmnožinách, lineárních zobrazeních atp.

Definice. Normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice indukované normou, se nazývá **Banachův prostor**.

Příklad 2. *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Prostor $\mathbb{F}^n$ je separabilní Banachův prostor, pokud jej uvažujeme s některou z norem $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, \infty]$, kde*

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p} \text{ pro } p \in [1, \infty),$$
$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

Větička 3. *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor a Y je podprostor X. Pak $(Y, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Je-li X Banachův prostor, pak Y je Banachův prostor (tj. úplný), právě když Y je uzavřený v X.*

Příklady 4.

(1) *Je-li Γ libovolná množina, označme*

$$B(\Gamma, \mathbb{F}) = \{f : \Gamma \to \mathbb{F}; f \text{ omezená}\}.$$

Pak $B(\Gamma, \mathbb{F})$ je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$. Pokud na něm definujeme normu $\|\cdot\|_\infty$ předpisem

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(\gamma)|; \gamma \in \Gamma\}, \quad f \in B(\Gamma),$$

dostaneme Banachův prostor. Nadále ho budeme značit $\ell^\infty(\Gamma, \mathbb{F})$ nebo jen $\ell^\infty(\Gamma)$ (pokud $\mathbb{F}$ je buď dáno nebo není podstatné). Konvergence posloupností v $\ell^\infty(\Gamma)$ splývá se stejnoměrnou konvergencí na Γ.

(2) *Prostor $\ell^\infty(\mathbb{N})$ značíme ℓ^∞ a interpretujeme jako prostor omezených posloupností. Prostor ℓ^∞ není separabilní.*

(3) *Je-li T metrický (nebo obecněji topologický) prostor, značíme*

$$\mathcal{C}_b(T, \mathbb{F}) = \{f : T \to \mathbb{F}; f \text{ je spojitá a omezená}\}.$$

Pak $\mathcal{C}_b(T, \mathbb{F})$ je uzavřený podprostor $\ell^\infty(T)$, je to tedy Banachův prostor. (Často píšeme jen $\mathcal{C}_b(T)$.)

(4) *Je-li K kompaktní metrický (nebo obecněji Hausdorffův kompaktní topologický) prostor, pak každá spojitá funkce na K je omezená. Místo $\mathcal{C}_b(K)$ píšeme jen $\mathcal{C}(K)$. Je-li K kompaktní metrický prostor, je prostor $\mathcal{C}(K)$ separabilní.*

(5) *Nechť c_0 označuje prostor všech (reálných nebo komplexních) posloupností, které mají limitu 0. Pak c_0 je uzavřený podprostor ℓ^∞, je to tedy Banachův prostor. Prostor c_0 je separabilní.*

(6) *Je-li Γ libovolná množina, označme*

$$c_0(\Gamma, \mathbb{F}) = \{f : \Gamma \to \mathbb{F}; \forall \varepsilon > 0 : \{\gamma \in \Gamma; |f(\gamma)| > \varepsilon\} \text{ je konečná}\}.$$

Pak $c_0(\Gamma, \mathbb{F})$ je uzavřený podprostor $\ell^\infty(\Gamma, \mathbb{F})$, je to tedy Banachův prostor. Často tento prostor budeme značit jen $c_0(\Gamma)$. Prostor $c_0(\mathbb{N})$ splývá s prostorem c_0. Je-li Γ nespočetná, je prostor $c_0(\Gamma)$ neseparabilní.

(7) *Nechť*

$$\mathcal{C}^1([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{F}; f' \text{ je spojitá na } [0,1]\},$$

kde f' označuje derivaci funkce f (v krajních bodech jednostrannou). Pak $\mathcal{C}^1([0,1])$ je separabilní Banachův prostor, pokud normu definujeme jako

$$\|f\|_{\mathcal{C}^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \max\{|f(x)|; x \in [0,1]\} + \max\{|f'(x)|; x \in [0,1]\}.$$

Větička 5. *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor. Nechť funkce $\phi : X \to [0, +\infty]$ splňuje následující vlastnosti:*
(a) ϕ splňuje axiomy normy (bod (ii) se požaduje jen pro $\lambda \neq 0$);
(b) $\phi(x) \geq \|x\|$ pro každé $x \in X$;
(c) ϕ je zdola polospojitá na X, tj. $\{x \in X; \phi(x) \leq c\}$ je uzavřená v X pro každé $c \in \mathbb{R}$.
Označme $Y = \{x \in X; \phi(x) < +\infty\}$. Pak (Y, ϕ) je Banachův prostor.

Příklady 6.

(1) *Nechť Γ je libovolná množina a $p \in [1, \infty)$. Definujme*

$$\ell^p(\Gamma) = \{f : \Gamma \to \mathbb{F}; \sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p < +\infty\}.$$

Pak $\ell^p(\Gamma)$ je Banachův prostor, pokud definujeme normu předpisem

$$\|f\|_p = \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p \right)^{1/p}, \quad f \in \ell^p(\Gamma).$$

Místo $\ell^p(\mathbb{N})$ píšeme jen ℓ^p. Prostor ℓ^p je separabilní. Je-li Γ nespočetná, je $\ell^p(\Gamma)$ neseparabilní.

(2) *Nechť K je kompaktní metrický (nebo obecněji Hausdorffův topologický) prostor. Nechť $\mathcal{M}(K, \mathbb{R})$ značí prostor všech konečných znaménkových regulárních borelovských měr na K a $\mathcal{M}(K, \mathbb{C})$ prostor všech komplexních regulárních borelovských měr na K. V obou případech definujme normu předpisem*

$$\|\mu\| = |\mu|(K) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\mu(B_j)| ; B_1, \dots, B_n \subset K \text{ po dvou disjunktní borelovské} \right\}.$$

Pak $\mathcal{M}(K, \mathbb{R})$ je reálný Banachův prostor a $\mathcal{M}(K, \mathbb{C})$ je komplexní Banachův prostor. Souhrnně značíme $\mathcal{M}(K, \mathbb{F})$ nebo jen $\mathcal{M}(K)$.

Příklad 7. *Nechť (Ω, Σ, μ) je prostor s nezápornou mírou. Označme $\mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{F})$ vektorový prostor všech Σ-měřitelných funkcí na Ω s hodnotami v $\mathbb{F}$. Na tomto prostoru uvažujme ekvivalenci definovanou rovností μ-skoro všude. Nechť $L^0(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{F})$ značí vektorový prostor všech tříd této ekvivalence. Pro $[f] \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{F})$ označme*

$$\|[f]\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \quad \text{pro } p \in [1, \infty),$$
$$\|[f]\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |f| = \inf\{c > 0; |f| \leq c \ \mu\text{-skoro všude}\}.$$

Pak pro každé $p \in [1, \infty]$ je prostor

$$L^p(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{F}) = \{[f] \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{F}); \|[f]\|_p < \infty\}$$

Banachův prostor, je-li opatřen normou $\|\cdot\|_p$.
Nevede-li to k nedorozumění, píšeme jen $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, případně $L^p(\mu)$ nebo $L^p(\Omega)$. Rovněž obvykle píšeme f místo $[f]$.
Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borelovská množina, pak prostorem $L^p(\Omega)$ rozumíme prostor $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, kde Σ je σ-algebra borelovských podmnožin Ω a μ je zúžení n-rozměrné Lebesgueovy míry na Σ. Tento prostor je separabilní.

Větička 8 (spojitost operací). *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{F}$. Pak*

$$x \mapsto \|x\|; \quad (x, y) \mapsto x + y; \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

jsou spojitá zobrazení (po řadě $X \to \mathbb{R}$, $X \times X \to X$, $\mathbb{F} \times X \to X$).

Značení: Nechť X je normovaný lineární prostor, $x \in X$ a $r > 0$. Pak značíme

- $B(x, r) = \{y \in X; \|y - x\| \leq r\}$ (**uzavřená koule o středu x a poloměru r**)
- $U(x, r) = \{y \in X; \|y - x\| < r\}$ (**otevřená koule o středu x a poloměru r**)
- $B_X = B(\boldsymbol{o}, r) = \{y \in X; \|y\| \leq 1\}$ (**uzavřená jednotková koule**)
- $U_X = U(\boldsymbol{o}, r) = \{y \in X; \|y\| < 1\}$ (**otevřená jednotková koule**)
- $S_X = \{y \in X; \|y\| = 1\}$ (**jednotková sféra**)

Poznámka:

- $B(x, r)$ (a tedy i B_X) je uzavřená konvexní množina.
- $U(x, r)$ (a tedy i U_X) je otevřená konvexní množina.
- S_X je uzavřená množina.

Tvrzení 9 (charakterizace ekvivalentních norem). *Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou dvě normy na X. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní*

(i) *Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ určují stejné otevřené množiny. (Tj. identické zobrazení na X je homeomorfismus $(X, \|\cdot\|_1)$ na $(X, \|\cdot\|_2)$.)*

(ii) *Existují konstanty $c, d > 0$, že pro všechna $x \in X$ platí*

$$c \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq d \|x\|_1 .$$

(iii) *Existují konstanty $c, d > 0$, že pro všechna $x \in X$ platí*

$$c \cdot B_{(X, \|\cdot\|_2)} \subset B_{(X, \|\cdot\|_1)} \subset d \cdot B_{(X, \|\cdot\|_2)}.$$

Definice. Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ na vektorovém prostoru X se nazývají **ekvivalentní**, jestliže splňují některou z (ekvivalentních) podmínek v Tvrzení 9.

Příklad 10. *Pro každé $x \in \mathbb{F}^n$ a každé $p \in [1, \infty)$ platí*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty ,$$

tedy všechny normy $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, \infty]$, jsou na $\mathbb{F}^n$ navzájem ekvivalentní.