Hölder a Minkowski v $L^p(\mu)$

Nechť $p, q \in (1, +\infty)$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

☑ <u>Youngova nerovnost</u>: Nechť $a, b \geq 0$

Pak $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$

a rovnost nastává, právě když $a^p = b^q$

<u>Dk:</u> Nechť $b > 0$ je pevné. Uvažme funkci:

$$\varphi(a) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab \quad , \quad a \in [0, +\infty)$$

Pak platí: • φ je spojitá na $[0, +\infty)$

• $\varphi(0) = \dfrac{b^q}{q} > 0$

• $\varphi'(a) = a^{p-1} - b$

průběh φ:

a:	0		$b^{\frac{1}{p-1}}$		$+\infty$
φ:	b^q/q	$\searrow$	0	$\nearrow$	
φ':		$-$	0	$+$	

$$\varphi\left(b^{\frac{1}{p-1}}\right) = \frac{1}{p} b^{\overbrace{\frac{p}{p-1}}^{=q}} + \frac{1}{q} b^q - b^{\overbrace{1 + \frac{1}{p-1}}^{=q}}$$

$$= b^q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right) = 0$$

Teď $\varphi \geq 0$ na $[0,+\infty)$ ... to dává nerovnost

$\varphi(a) = 0 \iff a = b^{\frac{1}{p-1}} \iff a^p = b^q$

... to dává podmínku rovnosti.

$\boxed{2}$ Mějme prostor s mírou (Ω, Σ, μ), f, g dvě měřitelné funkce.

Pak $$\int_\Omega |f \cdot g| \, d\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g|^q \, d\mu\right)^{1/q}$$

Jsou-li oba výrazy vpravo konečné, pak rovnost nastává, právě když $|f|^p = c \cdot |g|^q$ μ-s.v. pro nějaké $c \geq 0$

Dk: $f = 0$ μ-s.v. nebo $g = 0$ μ-s.v.

$\Rightarrow$ platí rovnost (obě strany jsou 0)

Předpokládejme, že f ani g nejsou s.v. nulové

Pak $$\alpha := \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} > 0$$

$$\beta := \left(\int_\Omega |g|^q\right)^{1/q} > 0$$

Pokud $\alpha = +\infty$ nebo $\beta = +\infty$, nerovnost platí. Nechť $\alpha, \beta \in (0,\infty)$

Pak $$\int_\Omega |fg| \, d\mu = \alpha \cdot \beta \int_\Omega \frac{|f|}{\alpha} \cdot \frac{|g|}{\beta} \, d\mu$$

$$\overset{\boxed{1}}{\leq} \alpha\beta \cdot \int_\Omega \left(\frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\alpha^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\beta^q}\right) d\mu$$

$$= \alpha\beta \cdot \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\alpha^p} \underbrace{\int_\Omega |f|^p d\mu}_{= \alpha^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{\beta^q} \underbrace{\int_\Omega |g|^q d\mu}_{= \beta^q} \right)$$

$$= \alpha\beta \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = \alpha\beta .$$

To dokazuje nerovnost.

Rovnost platí $\iff$ $\frac{|f|^p}{\alpha^p} = \frac{|g|^q}{\beta^q}$ (μ-s.v.)

Protože $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$, znamená to $|f|^p = \frac{\alpha^p}{\beta^q} \cdot |g|^q$

a to je ono.

13 Pokud f, g jsou měřitelné, $\int_\Omega |f|^p d\mu < \infty$ a $\int_\Omega |g|^q d\mu < \infty$,

pak $f \cdot g$ je integrovatelná a

$$\left| \int_\Omega fg\, d\mu \right| \leq \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g|^q \right)^{1/q}$$

Dk: fg měřitelná a z 12 plyne

$$\int_\Omega |fg| d\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g|^q d\mu \right)^{1/q}$$

tedy fg je integrovatelná a $\left| \int_\Omega fg\, d\mu \right| \leq \int_\Omega |fg|\, d\mu$

$\boxed{4}$ Nechť f je měřitelná a $\int_\Omega |f|^p \, d\mu < +\infty$

Pak $\left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} = \sup\left\{ \left|\int_\Omega f g \, d\mu\right| ; \int_\Omega |g|^q \, d\mu = 1 \right\}$

Dk: „$\geq$" plyne z $\boxed{3}$

„$\leq$" plyne z toho, že se nabývá rovnost

$$\text{pro } g = \frac{\bar{f} \cdot |f|^{p-2}}{\left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}}$$

(tam, kde je $f=0$, je i $g=0$)

$\boxed{5}$ $f, g \in L^p(\mu) \Rightarrow f+g \in L^p(\mu)$ a $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Dk: • Nechť f, g jsou omezené. Pak i $f+g$ je omezená, a tedy $f+g \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Pro $h \in L^q$, $\|h\|_q = 1$ platí:

$$\left|\int (f+g) h \, d\mu\right| \leq \left|\int f h \, d\mu\right| + \left|\int g h \, d\mu\right|$$

$$\overset{\boxed{3}}{\leq} \|f\|_p \|h\|_q + \|g\|_p \|h\|_q$$

$$= \|f\|_p + \|g\|_p$$

přejdeme k supremu přes $\|h\|_q = 1$

z $\boxed{4}$ pak plyne $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

• obecný případ :

Nechť $A_n = \{\omega \in \Omega ;\ |f(\omega)| \le n \ \& \ |g(\omega)| \le n\}$

Pak $A_n \nearrow \Omega$,

Tedy
$$\left(\int_\Omega |f+g|^p \, d\mu\right)^{1/p} = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{A_n} |f+g|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

omezený případ

$$\le \lim_{n\to\infty} \left(\left(\int_{A_n} |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_{A_n} |g|^p \, d\mu\right)^{1/p} \right)$$

$$= \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

a to je ono.