Nechť $p \in [1,\infty)$. Pak prostor $X = L^p(\mu)$ je úplný.
(μ je libovolná σ-aditivní míra)

K důkazu použijeme Tvrzení I.26. Podle něj stačí dokázat, že každá absolutně konvergentní řada v X konverguje:

$\boxed{1}$ Nechť (f_n) je posloupnost v $L^p(\mu)$ a platí $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty$. Ukážeme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje v prostoru $L^p(\mu)$.

Příprava: Označme $C := \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p$.

Dále nechť $g_n := |f_n|$. Pak $g_n \geq 0$, $g_n \in L^p(\mu)$ a $\|g_n\|_p = \|f_n\|_p$

Dále položme $g(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\omega)$ pro každé ω.
Pak g je (nezáporná) měřitelná funkce s hodnotami v $[0,+\infty]$

$\boxed{2}$ Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:
$\|g_1 + \dots + g_n\|_p \leq \|g_1\|_p + \dots + \|g_n\|_p = \|f_1\|_p + \dots + \|f_n\|_p \leq C$

Tedy $\int (g_1 + \dots + g_n)^p \, d\mu \leq C$

protože $0 \leq (g_1 + \dots + g_n)^p \nearrow g^p$, z Léviho věty plyne $\int g^p \, d\mu \leq C$
Speciálně g je μ-s.v. konečná a $g \in L^p(\mu)$

$\boxed{3}$ Připomeňme, že $g_n = |f_n|$. Z $\boxed{2}$ tedy plyne, že pro μ-s.v. ω platí $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(\omega)| < \infty$, tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$ konverguje absolutně, tedy konverguje.

Definujme $f(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$. To je tedy skoro všude definovaná skoro všude konečná měřitelná funkce.

Zbývá ukázat, že $f \in L^p(\mu)$ a $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ v $L^p(\mu)$.

$\boxed{4}$ Pro $n, m \in \mathbb{N}$ označme

$$F_{n,m} := f_{n+1} + \dots + f_{n+m}$$

$$F_n := \sum_{k=1}^{\infty} f_{n+k} \qquad (\text{ve smyslu bodové konvergence } \mu\text{-s.v.})$$

Z $\boxed{3}$ víme, že F_n je s.v. definovaná a s.v. konečná a $F_{n,m} \xrightarrow{m \to \infty} F_n$ s.v.

Navíc
$$|F_{n,m}| \leq |f_{n+1}| + \dots + |f_{n+m}| = g_{n+1} + \dots + g_{n+m} \leq \sum_{k=1}^{\infty} g_{n+k} \leq g$$
$(\mu$-s.v.$)$

Tedy $|F_{n,m}|^p \leq g^p$ $(\mu$-s.v.$)$

Protože $g \in L^p(\mu)$ dle $\boxed{2}$, je $g^p \in L^1(\mu)$, a tedy z Lebesgueovy věty je

(*) $$\int |F_n|^p = \lim_{m \to \infty} \int |F_{n,m}|^p \leq \int g^p,$$

tedy $F_n \in L^p(\mu)$ pro každé n, odtud speciálně $f \in L^p(\mu)$

$\boxed{5}$ Nakonec ukážeme, že $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ v $L^p(M)$:

$f - \sum_{k=1}^{n} f_k = F_n$, je tedy třeba ukázat, že $F_n \to 0$ v $L^p(M)$

Z (*) vidíme, že $\|F_n\|_p = \lim_{m\to\infty} \|F_{n,m}\|_p$

Přitom $\|F_{n,m}\|_p = \|f_{n+1} + \dots + f_{n+m}\|_p$

$$\le \|f_{n+1}\|_p + \dots + \|f_{n+m}\|_p \le \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n+k}\|_p$$

Tedy $\|F_n\|_p \le \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n+k}\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$, protože $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < +\infty$.

Tím je důkaz ukončen.