K Příkladu I.2:

pro $p \in [1,\infty)$ definujeme $\|(x_1,\dots,x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$

To je pak norma na $\mathbb{F}^n$. Axiomy (i) a (ii) jsou snadné.

Trojúhelníková nerovnost: $\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$

pro $p=1$ je to snadný důsledek trojúhelníkové nerovnosti v $\mathbb{F}$:

$$\sum_{i=1}^n |x_i+y_i| \le \sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|) = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i|$$

Pro $p \in (1,\infty)$ je to důsledek Minkowského nerovnosti:

$$\text{(M)}\quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p} \\ \qquad\qquad \text{je-li } p \in (1,\infty),\ a_i \ge 0,\ b_i \ge 0 \end{array} \right.$$

Jest totiž

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \underset{\Delta\text{-nerovnost v } \mathbb{F}}{\le} \left(\sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)^p\right)^{1/p} \underset{\text{(M)}}{\le} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{1/p}$$

Nerovnost (M) nebo i přímo trojúhelníkovou nerovnost lze dokázat například pomocí Hölderovy nerovnosti,

$$\text{(H)}\quad \left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q}$$

$$x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n \in \mathbb{F},\quad p,q>1,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Protože $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\cdot|y_i|$, stačí (H) dokázat

v případě $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$

- pokud $x_i = 0$ pro všechna i nebo $y_i = 0$ pro všechna i, platí v (H) rovnost

- Dokažme případ, kdy aspoň jedno x_i je kladné a zároveň aspoň jedno y_i je kladné.

Za fixujme $y_1, \dots, y_n \geq 0$, aspoň jedno kladné, zvolme $c > 0$ a najděme maximum funkce

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{na množině}$$

$$A = \{(x_1, \dots, x_n);\ x_i \geq 0 \text{ pro každé } i \text{ a } \sum_{i=1}^{n} x_i^p = c^p\}$$

K tomu použijeme větu o multiplikátorech:

označme $J := \{i \in \{1, \dots, n\};\ y_i > 0\}$. Pak $J \neq \emptyset$

$$d := \sum_{i=1}^{n} y_i^q$$

Pro $I \subset \{1, \dots, n\}$ neprázdnou označme

$$A_I = \{(x_1, \dots, x_n) \in A;\ x_i > 0 \iff i \in I\}$$

$$= \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_i = 0 \text{ pro } i \notin I;\ x_i > 0 \text{ pro } i \in I,\ \sum_{i \in I} x_i^p = c^p\}$$

Pak $A = \bigcup_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, n\}} A_I$

Navíc, pokud v bodě $(x_1,\dots,x_n) \in A_I$ je maximum, pak z věty o multiplikátorech plyne existence $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$y_i = \lambda p x_i^{p-1}, \qquad i \in I$$

[podmínka nenulovosti gradientu je splněna]

- pokud pro nějaké $i \in I$ je $y_i = 0$, pak buď $\lambda = 0$ nebo $x_i = 0$. Ale pro $i \in I$ je $x_i > 0$, tedy $\lambda = 0$. Proto $y_i = 0$ pro $i \in I$, neboli $I \cap J = \emptyset$. Pak ovšem $f(x_1,\dots,x_n) = 0$.

- Nechť pro každé $i \in I$ platí $y_i > 0$, neboli $I \subset J$.

Pak pro $i \in I$ platí $x_i = \left(\frac{y_i}{\lambda p}\right)^{\frac{1}{p-1}}$

Máme

$$C^p = \sum_{i \in I} x_i^p = \sum_{i \in I} \left(\frac{y_i}{\lambda p}\right)^{\underbrace{\frac{p}{p-1}}_{=q}}$$

$$\lambda p = \left(\frac{1}{C^p} \sum_{i \in I} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\Rightarrow x_i = \left(\frac{C^{p/q}\, y_i}{\left(\sum_{i \in I} y_i^q\right)^{1/q}}\right)^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{pro } i \in I$$

Pak

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i \in I} \frac{C^{\underbrace{\frac{p}{q(p-1)}}_{=1}} \cdot y_i^{\underbrace{\frac{1}{p-1}+1}_{=q}}}{\left(\sum_{i \in I} y_i^q\right)^{\underbrace{\frac{1}{q(p-1)}}_{=\frac{1}{p}}}}$$

$$= C \cdot \left(\sum_{i \in I} y_i^q\right)^{1-\frac{1}{p}} = C \cdot \left(\sum_{i \in I} y_i^q\right)^{1/q}$$

Nyní je zřejmé, že maximum se nabývá v případě $I = J$,

je rovno $C \cdot \left(\sum_{i \in J} y_i^q\right)^{1/q} = C \cdot D$

Tedy $f(x_1, \dots, x_n) \le C \cdot D$ pro $(x_1, \dots, x_n) \in A$,

což dokazuje (H).

Navíc vidíme z výpočtu, že v (H) nastává rovnost

- pro nezáporná x_i, y_i je to právě v případě, že
    - $x_i > 0 \iff y_i > 0$
    - $x_i = c \cdot y_i^{\frac{1}{p-1}}$ pro nějaké $c > 0$, neboli $x_i^p = c \cdot y_i^q$ pro nějaké $c > 0$

- pro $x_i, y_i \in \mathbb{F}$ nastává rovnost
  $\iff$ (a) $x_i \neq 0 \iff y_i \neq 0$
  (b) $|x_i|^p = c \cdot |y_i|^q$ pro nějaké $c > 0$
  (c) $\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| = \sum_{i=1}^n |x_i y_i|$

  Tvrzení (c) platí, právě když jsou všechna čísla $x_i y_i$ na jedné polopřímce vycházející z 0. ⌟

DŮKAZ TROJÚHELNÍKOVÉ NEROVNOSTI pro $p > 1$:

Z (H) plyne:

(*) $$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| ; \|(y_1, \dots, y_n)\|_q = 1\right\}$$

$$\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1\right)$$

[Přesněji: z (H) plyne „$\geq$";

opačná nerovnost plyne z toho, že můžeme (H) nastat rovnost,

případně použijeme výše vyřešenou úlohu na extrémy,

z ní plyne, že supremum se nabývá]

Nyní dokážeme onu trojúhelníkovou nerovnost:

Nechť $u, v \in \mathbb{F}^n$. Pro libovolné $y \in \mathbb{F}^n$, $\|y\|_q = 1$

platí:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i) y_i\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} u_i y_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} v_i y_i\right| \overset{(*)}{\leq} \|u\|_p + \|v\|_p$$

$\Downarrow$ přechod k supremu, použití (*)

$$\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$