I.5 Struktura Hilbertových prostorů

Příklad 30. *Je-li Γ libovolná množina, pak prostor $\ell^2(\Gamma)$ je Hilbertův prostor, pokud ho opatříme skalárním součinem*

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)\overline{g(\gamma)}, \quad f, g \in \ell^2(\Gamma).$$

Věta 31 (nejbližší body v Hilbertových prostorech). *Nechť H je Hilbertův prostor a $C \subset H$ neprázdná uzavřená konvexní množina. Pak pro každý bod $x \in H$ existuje právě jeden bod $y \in C$ nejbližší k x, tj. takový $y \in C$, že*

$$\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C) = \inf\{\|x - z\| \,;\, z \in C\}.$$

Tvrzení 32 (charakterizace nejbližšího bodu). *Nechť H je Hilbertův prostor, $C \subset H$ neprázdná uzavřená konvexní množina a $x \in H$. Bod $y \in C$ je nejbližším bodem k x, právě když platí*

$$\operatorname{Re}\langle x - y, z - y\rangle \le 0 \text{ pro každé } z \in C.$$

Speciálně, pokud C je uzavřený podprostor, pak $y \in C$ je nejbližším bodem k x, právě když platí

$$\langle x - y, z\rangle = 0 \text{ pro každé } z \in C.$$

Definice. Nechť H je reálný prostor se skalárním součinem a $x, y \in H$ dva nenulové prvky. **Úhlem mezi vektory** x **a** y rozumíme takové $\alpha \in [0, \pi]$, pro které platí

$$\cos\alpha = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} \qquad \left(\text{tj. } \alpha = \arccos\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}\right).$$

Poznámka: Je-li H reálný, pak podmínka charakterizující nejbližší bod v Tvrzení 33 říká, že po každé $z \in C$ je úhel mezi vektory $x - y$ a $z - y$ (tj. úhel xyz) neostrý (tj. pravý nebo tupý).

Definice. Nechť H je prostor se skalárním součinem.

- Říkáme, že prvky $x, y \in H$ jsou **kolmé** (nebo **ortogonální**), pokud $\langle x, y\rangle = 0$. Tuto skutečnost zapisujeme $x \perp y$.
- Říkáme, že dvě podmnožiny $A, B \subset H$ jsou navzájem **kolmé** (nebo **ortogonální**), pokud $x \perp y$ pro každé $x \in A$ a $y \in B$.
- Nechť $A \subset H$. **Ortogonálním doplňkem** množiny A rozumíme množinu
$$A^\perp = \{x \in H; x \perp y \text{ pro každé } y \in A\}.$$

Poznámka. $A^\perp$ je uzavřený podprostor H pro každou podmnožinu $A \subset H$.

Větička 33 (Pythagorova věta). *Nechť H je prostor se skalárním součinem a $x, y \in H$ jsou dva kolmé prvky. Pak $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. (Je-li H reálný, platí i obrácení – jestliže $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, pak $x \perp y$.)*

Věta 34 (ortogonální doplněk a ortogonální projekce). *Nechť H je Hilbertův prostor a $Y \subset H$ je uzavřený podprostor. Pro každé $x \in H$ označme Px bod v Y nejbližší k x. Pak platí:*

(a) *P je lineární projekce, $\|P\| \le 1$, $P(H) = Y$, $\operatorname{Ker} P = Y^\perp$.*
(b) *$I - P$ je lineární projekce, $\|I - P\| \le 1$, $(I - P)(H) = Y^\perp$, $\operatorname{Ker}(I - P) = Y$.*
(c) *Pro každé $x \in H$ je $(I - P)x$ bod v $Y^\perp$ nejbližší k x.*
(d) *$(Y^\perp)^\perp = Y$.*
(e) *Pro každé $x \in H$ existuje právě jedna dvojice prvků $y \in Y$ a $z \in Y^\perp$ splňující $x = y + z$.*

Definice. Projekce P z Věty 34 se nazývá **ortogonální projekce na podprostor** Y.

Definice. Nechť H je prostor se skalárním součinem a $(e_j)_{j\in J}$ je indexovaný systém prvků H. Tento systém se nazývá

- **ortogonální**, pokud pro každé dva různé indexy $j,k\in J$ platí $e_j\perp e_k$;
- **ortonormální**, pokud je ortogonální a navíc pro každé $j\in J$ platí $\|e_j\|=1$.

Poznámka. Je-li $(e_j)_{j\in J}$ ortogonální systém neobsahující nulový vektor, pak systém $(\frac{e_j}{\|e_j\|})_{j\in J}$ je ortonormální. Dále se budeme zabývat jen ortonormálními systémy, nicméně uvedená tvrzení lze s využitím zmíněného postřehu použít (patřičně upravená) i pro ortogonální systémy.

Věta 35 (Besselova nerovnost). *Nechť H je prostor se skalárním součinem a $(e_j)_{j\in J}$ je ortonormální systém v H. Pak pro každé $x\in H$ platí*

$$\sum_{j\in J}|\langle x,e_j\rangle|^2\le\|x\|^2.$$

Definice. Nechť H je prostor se skalárním součinem a $(e_j)_{j\in J}$ je ortonormální systém v H. Říkáme, že tento systém je

- **maximální ortonormální**, pokud k němmu nelze přidat žádný prvek tak, aby systém zůstal ortonormální, tj. pokud $\{e_j;j\in J\}^\perp=\{0\}$;
- **úplný ortonormální**, pokud lineární obal množiny $\{e_j;j\in J\}$ je hustý v H;
- **ortonormální báze**, pokud pro každé $x\in H$ existují koeficienty $(x_j)_{j\in J}$ v $\mathbb{F}$ takové, že $$x=\sum_{j\in J}x_je_j.$$

Poznámky. Každá ortonormální báze je úplný ortonormální systém. Každý úplný ortonormální systém je maximální. Kanonické jednotkové vektory tvoří ortonormální bázi prostoru $\ell^2(\Gamma)$.

Věta 36. *Nechť H je Hilbertův prostor a $(e_j)_{j\in J}$ je ortonormální systém v H. Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(i) $(e_j)_{j\in J}$ *je maximální ortonormální systém.*
(ii) $(e_j)_{j\in J}$ *je úplný ortonormální systém.*
(iii) $(e_j)_{j\in J}$ *je ortonormální báze.*
(iv) *Pro každé $x\in H$ platí $x=\sum_{j\in J}\langle x,e_j\rangle e_j$.*
(v) *Pro každé $x,y\in H$ platí $\langle x,y\rangle=\sum_{j\in J}\langle x,e_j\rangle\overline{\langle y,e_j\rangle}$*
(vi) (Parsevalova rovnost) *Pro každé $x\in H$ platí $\|x\|^2=\sum_{j\in J}|\langle x,e_j\rangle|^2$.*

Důsledek 37. *Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.*

Důsledek 38 (Riesz-Fisherova věta). *Nechť H je Hilbertův prostor a $(e_j)_{j\in J}$ nějaká ortonormální báze. Pak zobrazení $T:\ell^2(J)\to H$ definované předpisem*

$$T(f)=\sum_{j\in J}f(j)e_j,\quad f\in\ell^2(J),$$

je izometrie prostoru $\ell^2(J)$ na H. Tedy, každý Hilbertův prostor je izometrický prostoru $\ell^2(J)$ pro nějakou množinu J.

Poznámka. V separabilním prostoru se skalárním součinem je každý ortonormální systém spočetný.

Důsledek 39 (Riesz-Fisherova věta pro separabilní prostory). *Každý nekonečně-rozměrný separabilní Hilbertův prostor je izometrický prostoru ℓ^2.*

Důsledek 40 (vyjádření ortogonální projekce). *Nechť H je Hilbertův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Nechť $(e_j)_{j\in J}$ nějaká ortonormální báze prostoru Y. Pak ortogonální projekci na Y lze vyjádřit vzorcem*

$$Px=\sum_{j\in J}\langle x,e_j\rangle e_j,\quad x\in H.$$