IV.5 Konvoluce distribucí

Značení: Je-li f funkce d reálných proměnných a $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^d$, definujeme

$$\partial_{\boldsymbol{e}} f(\boldsymbol{a}) = \lim_{r\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+r\boldsymbol{e}) - f(\boldsymbol{a})}{r},$$

pokud limita existuje. (Jestliže $\boldsymbol{e}$ je jednotkový vektor, jde o derivaci funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ ve směru $\boldsymbol{e}$.)

Lemma 22. *Nechť $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.*

(a) *Je-li $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$ v $\mathbb{R}^d$, pak $\tau_{\boldsymbol{x}_n}\varphi \to \tau_{\boldsymbol{x}}\varphi$ v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.*

(b) *Nechť $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^d$. Pak $\partial_{\boldsymbol{e}}\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Navíc, pokud pro $r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ definujeme funkci φ_r předpisem*

$$\varphi_r(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{r}(\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x}-r\boldsymbol{e})), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,$$

tj. $\varphi_r = \frac{1}{r}(\varphi - \tau_{r\boldsymbol{e}}\varphi)$, pak $\varphi_r \to \partial_{\boldsymbol{e}}\varphi$ v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ pro $r \to 0$.

Tvrzení 23. *Nechť $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2})$.*

(a) *Nechť $\Lambda \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{d_1})$. Pro $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{d_2}$ definujme $\psi(\boldsymbol{y}) = \Lambda(\boldsymbol{x} \mapsto \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$. Pak $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{d_2})$ a pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^{d_2}$ platí $D^\alpha\psi(\boldsymbol{y}) = \Lambda(\boldsymbol{x} \mapsto D^{(\boldsymbol{o},\alpha)}\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ pro $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{d_2}$.*

(b) (Fubiniova věta pro distribuce) *Nechť $\Lambda_1 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{d_1})$ a $\Lambda_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{d_2})$. Pak*

$$\Lambda_2(\boldsymbol{y} \mapsto \Lambda_1(\boldsymbol{x} \mapsto \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))) = \Lambda_1(\boldsymbol{x} \mapsto \Lambda_2(\boldsymbol{y} \mapsto \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))).$$

Definice. Nechť U je distribuce na $\mathbb{R}^d$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. **Konvolucí funkce φ a distribuce U** rozumíme funkci $U * \varphi$ definovanou vzorcem

$$U * \varphi(\boldsymbol{x}) = U(\tau_{\boldsymbol{x}}\check{\varphi}) = U(\boldsymbol{y} \mapsto \varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Poznámka: Protože $\tau_{\boldsymbol{x}}\check{\varphi} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ kdykoli $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, je $U*\varphi$ dobře definovaná funkce na $\mathbb{R}^d$.

Věta 24 (o konvoluci distribuce a testovací funkce). *Nechť U je distribuce na $\mathbb{R}^d$ a $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Pak platí:*

(a) *Je-li $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, pak $\Lambda_f * \varphi = f * \varphi$.*

(b) *$U * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ a pro každý multiindex α platí*

$$D^\alpha(U * \varphi) = (D^\alpha U) * \varphi = U * D^\alpha\varphi.$$

(c) $\operatorname{spt}(U*\varphi) \subset \operatorname{spt} U + \operatorname{spt}\varphi$. *Speciálně, má-li U kompaktní nosič, pak $U*\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.*

(d) *Je-li (h_j) aproximativní jednotka v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $\Lambda_{U*h_j} \to U$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$.*

(e) *Pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ je $\tau_{\boldsymbol{x}}(U * \varphi) = (\tau_{\boldsymbol{x}}U) * \varphi = U * \tau_{\boldsymbol{x}}\varphi$.*

(f) *$U * (\varphi * \psi) = (U * \varphi) * \psi$.*

Značení. Je-li U distribuce na $\mathbb{R}^d$,

- jejím **posunem o $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$** rozumíme zobrazení $\tau_{\boldsymbol{x}} U$ definované vzorcem

$$\tau_{\boldsymbol{x}} U(\varphi) = U(\tau_{-\boldsymbol{x}}\varphi) = U(\boldsymbol{y} \mapsto \varphi(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d);$$

- jejím **otočením** rozumíme zobrazení $\check{U}$ definované vzorcem

$$\check{U}(\varphi) = U(\check{\varphi}) = U(\boldsymbol{y} \mapsto \varphi(-\boldsymbol{y})), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d).$$

Poznámka. Je-li U distribuce na $\mathbb{R}^d$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, pak $\tau_{\boldsymbol{x}} U$ i $\check{U}$ jsou také distribuce na $\mathbb{R}^d$. Je-li $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, pak

$$\tau_{\boldsymbol{x}} \Lambda_f = \Lambda_{\tau_{\boldsymbol{x}} f} \quad \text{a} \quad \widecheck{\Lambda_f} = \Lambda_{\check{f}}.$$

Definice. Nechť U a V jsou distribuce na $\mathbb{R}^d$, z nichž alespoň jedna má kompaktní nosič.

- Má-li V kompaktní nosič, **konvoluci distribucí U a V** definujeme vzorcem

$$U * V(\varphi) = (U * (V * \check{\varphi}))(0) = U(\check{V} * \varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d).$$

- Má-li U kompaktní nosič, zvolme nezápornou funkci $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, která je konstantně rovna jedné na nějaké otevřené množině obsahující $\operatorname{spt} U$ (ta existuje díky Tvrzení 2). **Konvoluci distribucí U a V** pak definujeme vzorcem

$$U * V(\varphi) = U(\psi \cdot (\check{V} * \varphi)), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d).$$

Věta 25 (o konvoluci dvou distribucí). *Nechť U a V jsou dvě distribuce na $\mathbb{R}^d$, z nichž aspoň jedna má kompaktní nosič. Pak platí:*

(a) *$U * V$ je distribuce na $\mathbb{R}^d$ a platí $U * V = V * U$.*
(b) *Pokud $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $U * \Lambda_\varphi = \Lambda_{U*\varphi}$.*
(c) *Pokud $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $\Lambda_f * \Lambda_\varphi = \Lambda_{f*\varphi}$.*
(d) $\operatorname{spt}(U * V) \subset \operatorname{spt} U + \operatorname{spt} V$. *Speciálně, mají-li U i V kompaktní nosič, má i $U * V$ kompaktní nosič.*
(e) *Pro každý multiindex α platí*

$$D^\alpha(U * V) = (D^\alpha U) * V = U * D^\alpha V.$$

(f) *$U = U * \Lambda_{\delta_0}$ a $D^\alpha U = U * D^\alpha \Lambda_{\delta_0}$ pro každý multiindex α.*
(g) *Je-li W distribuce na $\mathbb{R}^d$ s kompaktním nosičem, pak*

$$U * (V * W) = (U * V) * W.$$