IV.2 Distribuce, základní vlastnosti a operace

Značení:

- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Prvky $\mathbb{N}_0^d$ nazýváme **multiindexy**. Pro $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ značíme $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$. Toto číslo nazýváme **řádem multiindexu** α.
- Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{F})$ a $a \in \Omega$, pak
$$D^\alpha f(a) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}(a).$$

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina, (φ_n) posloupnost v $\mathscr{D}(\Omega)$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Řekneme, že posloupnost (φ_n) **konverguje k** φ **v** $\mathscr{D}(\Omega)$, pokud jsou splněny následující dvě podmínky:

- Existuje $K \subset \Omega$ kompaktní taková, že $\operatorname{spt} \varphi_n \subset K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
- Pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ platí $D^\alpha \varphi_n \rightrightarrows D^\alpha \varphi$ na K.

Tuto skutečnost zkráceně zapisujeme $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathscr{D}(\Omega)$.

Poznámka. Nechť $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ je multiindex.

- Pokud $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, pak $D^\alpha \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.
- Pokud $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathscr{D}(\Omega)$, pak $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ v $\mathscr{D}(\Omega)$.

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina. **Distribucí na** Ω rozumíme lineární zobrazení $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{F}$, pro které platí
$$\forall (\varphi_n) \subset \mathscr{D}(\Omega)\ \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \varphi_n \to \varphi \text{ v } \mathscr{D}(\Omega) \Rightarrow \Lambda(\varphi_n) \to \Lambda(\varphi).$$
Prostor všech distribucí značíme $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Poznámka: Značení $\mathscr{D}'(\Omega)$ naznačuje, že prostor distribucí je „duálem“ prostoru testovacích funkcí (duál prostoru X se někdy značí X'). Dle naší definice je to prostor všech „sekvenciálně spojitých“ lineárních funkcionálů na $\mathscr{D}(\Omega)$. Na $\mathscr{D}(\Omega)$ lze definovat jistou přirozenou topologii, v níž jsou to právě spojité lineární funkcionály. Více se lze dovědět v pokročilejších kurzech funkcionální analýzy.

Příklady 9. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina.*

(1) *Je-li $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, definujme*
$$\Lambda_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$
Pak Λ_f je distribuce na Ω.

(2) *Je-li μ nezáporná regulární borelovská míra na Ω, která je konečná na kompaktních podmnožinách Ω, pak*
$$\Lambda_\mu(\varphi) = \int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$
je distribuce na Ω.

(3) *Je-li μ konečná znaménková nebo komplexní regulární borelovská míra na Ω, pak zobrazení Λ_μ definované stejným vzorcem jako v předchozím bodě je distribuce na Ω.*

(4) *Zobrazení*
$$\Lambda(\varphi) = \varphi'(0), \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}),$$
je distribuce na $\mathbb{R}$, která není tvaru Λ_f ani Λ_μ z předchozích bodů.

Poznámky. Z Lemmatu 6 plynou následující tvrzení:

- Pokud pro $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ platí $\Lambda_f = \Lambda_g$, pak $f = g$ skoro všude na Ω. To ospravedlňuje skutečnost, že distribucím se někdy říká **zobecněné funkce**.
- Jsou-li μ a ν dvě míry, pro které platí $\Lambda_\mu = \Lambda_\nu$, pak $\mu = \nu$.
- Je-li $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ a μ míra, pro které platí $\Lambda_f = \Lambda_\mu$, pak $\mu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\lambda^d$ pro každou $A \subset \Omega$ borelovskou.

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina a Λ je distribuce na Ω.

- Je-li $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ multiindex, pak **α-tou derivací distribuce** Λ rozumíme zobrazení $D^\alpha\Lambda$ definované předpisem
$$D^\alpha\Lambda(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$
- Je-li $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, pak **násobkem distribuce Λ funkcí f** rozumíme zobrazení $f\Lambda$ definované předpisem
$$(f\Lambda)(\varphi) = \Lambda(f\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Poznámka. V případě, že $d = 1$, pak místo $D^1\Lambda$ píšeme Λ', místo $D^2\Lambda$ píšeme Λ'' a obecně místo $D^n\Lambda$ píšeme $\Lambda^{(n)}$.

Větička 10. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina. Pak platí:*

(a) *Pro každou $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ a každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ je $D^\alpha\Lambda$ také distribuce na Ω.*

(b) *Pro každou $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ je $D^\alpha\Lambda_f = \Lambda_{D^\alpha f}$.*

(c) *Je-li $d = 1$, $\Omega = (a, b)$ a $f \in L^1_{\mathrm{loc}}((a, b))$, pak*
   - *$(\Lambda_f)' = \Lambda_g$ (kde $g \in L^1_{\mathrm{loc}}((a, b))$), právě když funkce g je slabou derivací funkce f;*
   - *$(\Lambda_f)' = \Lambda_\mu$ (kde μ je konečná míra), právě když míra μ je slabou derivací funkce f.*

(d) *Je-li $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ a $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, pak $f\Lambda$ je distribuce na Ω.*

(e) *Je-li $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ a $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, pak $f\Lambda_g = \Lambda_{fg}$.*

Tvrzení 11.

(a) *Nechť $\Lambda \in \mathscr{D}'((a, b))$ a $\Lambda' = 0$. Pak existuje $c \in \mathbb{F}$, že $\Lambda = \Lambda_c$.*

(b) *Obecněji, je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená souvislá a $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ takvá, že $D^\alpha\Lambda = 0$ pro každý multiindex α splňující $|\alpha| = 1$, pak existuje $c \in \mathbb{F}$, že $\Lambda = \Lambda_c$.*