III.6 Spektrální teorie kompaktních operátorů

Úmluva: V tomto oddíle jsou všechny Banachovy prostory komplexní.

Větička 30. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in K(X)$. Pak platí:*

(a) *Pokud je X nekonečnědimenzionální, pak $0 \in \sigma(T)$.*
(b) *Pokud $R(T)$ je uzavřený, pak $\dim R(T) < \infty$, tj. $T \in F(X)$.*
(c) *Pokud $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pak $\dim \ker(\lambda \operatorname{Id}_X - T) < \infty$ a $R(\lambda \operatorname{Id}_X - T)$ je uzavřený.*

Věta 31 (Fredholmova alternativa). *Nechť X je Banachův prostor, $T \in K(X)$ a $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda \operatorname{Id}_X - T$ je prostý, právě když je na.*

Věta 32 (o spektru kompaktního operátoru). *Nechť X je Banachův prostor a $T \in K(X)$. Pak platí:*

(a) *$\sigma(T) \subset \sigma_p(T) \cup \{0\}$ (pokud X je nekonečné dimenze, platí rovnost).*
(b) *Pro každé $r > 0$ je množina $\{\lambda \in \sigma(T); |\lambda| > r\}$ konečná.*

Věta 33 (druhá Fredholmova věta). *Nechť X je Banachův prostor, $T \in K(X)$ a $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pak platí*

$$R(\lambda \operatorname{Id}_X - T) = (\ker(\lambda \operatorname{Id}_{X^*} - T'))_\perp \quad \text{a} \quad R(\lambda \operatorname{Id}_{X^*} - T') = (\ker(\lambda \operatorname{Id}_X - T))^\perp$$

Věta 34 (třetí Fredholmova věta). *Nechť X je Banachův prostor, $T \in K(X)$ a $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\begin{aligned}\dim(X/R(\lambda \operatorname{Id}_X - T)) &= \dim \ker(\lambda \operatorname{Id}_{X^*} - T') \\ &= \dim(X^*/R(\lambda \operatorname{Id}_{X^*} - T')) = \dim \ker(\lambda \operatorname{Id}_X - T)\end{aligned}$$

a toto číslo je konečné.