III.3 Duální a adjungované operátory

Definice. Nechť X a Y jsou normované lineární prostory a $T \in L(X,Y)$. Pro každé $y^* \in Y^*$ definujme zobrazení $T'y^* : X \to \mathbb{F}$ vzorcem

$$T'y^*(x) = y^*(Tx), \quad x \in X, \qquad \text{neboli } T'y^* = y^* \circ T.$$

Pak zobrazení $T' : y^* \mapsto T'y^*$ se nazývá **duálním operátorem k** T.

Poznámky:

- Z Věty I.12(d) plyne, že pro každé $y^* \in Y^*$ je $T'y^* \in X^*$ a $\|T'y^*\| \le \|T\| \cdot \|y^*\|$. Odtud snadno plyne, že $T' \in L(Y^*, X^*)$.
- Duální operátor k T' značíme T''.
- Duálnímu operátoru se někdy říká adjungovaný (nebo banachovsky adjungovaný) a někdy se značí T^* nebo T^t. My se přidržíme značení T', symbol T^* vyhradíme pro níže definovaný (hilbertovsky) adjungovaný operátor.

Větička 16 (základní vlastnosti duálních operátorů). *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory. Pak platí:*

(a) *Zobrazení $T \mapsto T'$ je lineární izometrie $L(X,Y)$ do $L(Y^*, X^*)$.*
(b) $(\mathrm{Id}_X)' = \mathrm{Id}_{X^*}$
(c) *Je-li $S \in L(Y,Z)$ a $T \in L(X,Y)$, pak $(ST)' = T'S'$.*
(d) *Je-li $T \in L(X,Y)$, pak $T'' \circ \varkappa_X = \varkappa_Y \circ T$.*

Poznámka: Pokud ztotožníme $\varkappa_X(X)$ a X (a podobně pro Y), pak bod (d) předchozího tvrzení znamená, že restrikce T'' na X je T.

Věta 17 (o adjungovaném operátoru). *Nechť H_1 a H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in L(H_1, H_2)$. Pak existuje právě jeden operátor $T^* \in L(H_2, H_1)$, pro který platí*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \qquad \text{pro } x \in H_1, y \in H_2.$$

Poznámky:

- Operátor T^* se nazývá (hilbertovsky) **adjungovaným operátorem k** T.
- Nechť $I_1 : H_1 \to H_1^*$ a $I_2 : H_2 \to H_2^*$ jsou sdruženě lineární izometrie z Věty II.19. Pak pro každé $T \in L(H_1, H_2)$ platí $T^* = I_1^{-1} T' I_2$.

Větička 18 (základní vlastnosti adjungovaných operátorů). *Nechť H_1, H_2, H_3 jsou Hilbertovy prostory. Pak platí:*

(a) *Zobrazení $T \mapsto T^*$ je sdruženě lineární izometrie $L(H_1, H_2)$ na $L(H_2, H_1)$.*
(b) $(\mathrm{Id}_{H_1})^* = \mathrm{Id}_{H_1}$
(c) *Je-li $S \in L(H_2, H_3)$ a $T \in L(H_1, H_2)$, pak $(ST)^* = T^*S^*$.*
(d) *Je-li $T \in L(H_1, H_2)$, pak $T^{**} (= (T^*)^*) = T$.*

Značení: Nechť X a Y jsou normované lineární prostory a $T \in L(X, Y)$. Obor hodnot operátoru T, tj. množinu $T(X)$ značíme symbolem $R(T)$.

Věta 19. *Nechť X a Y jsou normované lineární prostory a $T \in L(X, Y)$. Pak platí:*

$$\ker T' = (R(T))^\perp, \quad \overline{R(T)} = (\ker T')_\perp, \quad \ker T = (R(T'))_\perp.$$

Poznámka: V předchozí větě chybí vztah mezi $R(T')$ a $(\ker T)^\perp$. To proto, že $(\ker T)^\perp$ je rovno uzávěru $R(T')$ ve w^* topologii (tj. v topologii bodové konvergence na X). Toto přesahuje rámec Úvodu do funkcionální analýzy, bude to vysvětleno (v obecnějším kontextu) v pokročilejším kurzu.

Důsledek 20. *Nechť X a Y jsou normované lineární prostory a $T \in L(X, Y)$. Pak operátor T' je prostý, právě když $R(T)$ je hustý v Y.*

Věta 21. *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X, Y)$. Pak T je izomorfismus X na Y, právě když T' je izomorfismus Y^* na X^*.*

Poznámky:

- Implikace $\Rightarrow$ ve Větě 21 platí i bez předpokladu úplnosti X a Y, pro opačnou implikaci je úplnost podstatná.
- Platí i zobecnění Věty 21:
  (a) T je izomorfismus X do Y, právě když T' je na (úplnost není potřeba).
  (b) T je na, právě když T' je izomorfismus Y^* do X^* (úplnost je podstatná).

  Důkaz tvrzení (a) a implikace $\Rightarrow$ v Tvrzení (b) jsou snadné, implikace $\Leftarrow$ je náročnější – vyžaduje jistou formu Hahn-Banachovy věty, kterou se v Úvodu do funkcionální analýzy nezabýváme.