

## II.1 Analytické pokračování

**Definice.** **Analytickým elementem** rozumíme uspořádanou dvojici  $(f, D)$ , kde  $D \subset \mathbb{C}$  je otevřený kruh a  $f$  je funkce holomorfní na  $D$ . **Středem elementu**  $(f, D)$  rozumíme střed kruhu  $D$ .

**Poznámka.** Někdy se analytický element definuje jiným způsobem – jako dvojice  $(f, D)$ , kde  $D$  je otevřený kruh,  $f \in H(D)$  a přitom  $D$  je kruhem konvergence Taylorovy řady funkce  $f$  (se středem ve středu kruhu  $D$ ); nebo jako dvojice  $(f, z)$ , kde  $z \in \mathbb{C}$  a  $f$  je funkce holomorfní na nějakém okolí bodu  $z$ . Všechny tři přístupy jsou ekvivalentní, ale následné definice a tvrzení je třeba formulovat jinak. Budeme se držet výše uvedené definice.

**Definice.**

- Analytický element  $(f_2, D_2)$  se nazývá **přímým pokračováním** elementu  $(f_1, D_1)$ , pokud  $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$  a pro každé  $z \in D_1 \cap D_2$  platí  $f_1(z) = f_2(z)$ . Pokud navíc mají kruhy  $D_1$  a  $D_2$  týž střed, říkáme, že elementy  $(f_1, D_1)$  a  $(f_2, D_2)$  jsou **stejné**.
- Nechť  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je oblast. Analytický element  $(f, D)$  se nazývá **analytickým pokračováním elementu**  $(f_0, D_0)$  **v oblasti**  $\Omega$ , pokud existují analytické elementy  $(f_1, D_1), \dots, (f_n, D_n)$  takové, že platí
  - $D = D_n$  a  $f = f_n$ ,
  - $(f_k, D_k)$  je přímým pokračováním  $(f_{k-1}, D_{k-1})$  pro každé  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,
  - $D_k \subset \Omega$  pro každé  $k \in \{0, \dots, n\}$ .

**Poznámky:**

- (1) Dva elementy jsou stejné, pokud jde o tytéž elementy v některém z alternativních pohledů zmíněných výše. Tato terminologie je trochu zavádějící, ale budeme ji několikrát potřebovat.
- (2) Relace „být přímým pokračováním“ je symetrická, ale nikoli tranzitivní. Podrobněji: Nechť  $(f_2, D_2)$  je přímým pokračováním  $(f_1, D_1)$  a  $(f_3, D_3)$  je přímým pokračováním  $(f_2, D_2)$ . Pak mohou nastat následující případy:
  - $D_1 \cap D_3 = \emptyset$ . Pak  $(f_3, D_3)$  není přímým pokračováním  $(f_1, D_1)$ .
  - I když  $D_1 \cap D_3 \neq \emptyset$ ,  $(f_3, D_3)$  nemusí být přímým pokračováním  $(f_1, D_1)$ . Funkce  $f_1$  a  $f_3$  se totiž nemusí shodovat na  $D_1 \cap D_3$ .
  - Pokud  $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \neq \emptyset$ , pak  $(f_3, D_3)$  je přímým pokračováním  $(f_1, D_1)$ .
- (3) Relace „být analytickým pokračováním v oblasti  $\Omega$ “ je ekvivalence.

**Definice.** Nechť  $(f_0, D_0)$  je analytický element a  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  je spojitá křivka, přičemž  $\gamma(0)$  je střed kruhu  $D_0$ . Nechť  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je oblast.

- Analytický element  $(f, D)$  se nazývá **analytickým pokračováním**  $(f_0, D_0)$  **podél**  $\gamma$  **v oblasti**  $\Omega$ , jestliže  $\gamma(1)$  je středem kruhu  $D$  a navíc existují analytické elementy  $(f_1, D_1), \dots, (f_n, D_n)$  a dělení  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$  intervalu  $[0, 1]$  tak, že platí:

- $D = D_n$  a  $f = f_n$ ,
  - $(f_k, D_k)$  je přímým pokračováním  $(f_{k-1}, D_{k-1})$  pro každé  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,
  - $D_k \subset \Omega$  pro každé  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,
  - $\gamma([s_k, s_{k+1}]) \subset D_k$  pro každé  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ .
- Říkáme, že analytický element  $(f_0, D_0)$  má **analytické pokračování podél  $\gamma$  v oblasti  $\Omega$**  (nebo také, že jej lze analyticky pokračovat podél  $\gamma$  v oblasti  $\Omega$ ), jestliže existuje analytický element  $(f, D)$ , který je jeho analytickým pokračováním podél  $\gamma$  v oblasti  $\Omega$ .

**Věta 1.** *Nechť  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je oblast,  $(f_0, D_0)$  je analytický element a  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  je spojitá křivka, přičemž  $\gamma(0)$  je střed kruhu  $D_0$ . Pak existuje nejvýše jedno analytické pokračování  $(f_0, D_0)$  podél  $\gamma$ . Přesněji: Jsou-li  $(f_1, D_1)$  a  $(f_2, D_2)$  dvě taková pokračování, pak tyto dva elementy jsou stejné.*

**Definice. Analytickou funkci v oblasti  $\Omega$**  rozumíme třídu ekvivalence analytických elementů při ekvivalenci „být analytickým pokračováním v oblasti  $\Omega$ “.

**Definice.** Nechť  $f$  je analytická funkce v oblasti  $\Omega$ .

- **Definičním oborem  $f$**  rozumíme sjednocení všech otevřených kruhů  $D$ , pro které existuje  $f \in H(D)$  splňující  $(f, D) \in f$ . Definiční obor  $f$  budeme značit  $\text{dom}(f)$ .
- Nechť  $a \in \text{dom}(f)$ . **Množinou hodnot  $f$  v bodě  $a$**  rozumíme množinu
 
$$f(a) = \{z \in \mathbb{C} : \exists (f, D) \in f : a \in D \ \& \ f(a) = z\}.$$
- Nechť  $G \subset \text{dom}(f)$  je oblast. **Větvi  $f$  v množině  $G$**  rozumíme každou analytickou funkci  $g$  v  $G$ , která je podmnožinou  $f$ .

**Věta 2 (Poincaré-Volterra).** *Nechť  $f$  je analytická funkce v oblasti  $\Omega$  a  $a \in \text{dom}(f)$ . Pak existuje nejvýše spočetně mnoho analytických elementů o středu  $a$ , z nichž žádné dva nejsou stejné, a všechny patří do  $f$ . Speciálně, množina  $f(a)$  je nejvýše spočetná.*

**Definice.** Nechť  $f$  je analytická funkce v oblasti  $\Omega$  a  $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .

- Nechť  $a \in \text{dom}(f)$ . Říkáme, že  $f$  je  **$p$ -značná v bodě  $a$** , jestliže existuje právě  $p$  elementů o středu  $a$ , které patří do  $f$  a žádné dva z nich nejsou stejné (tj. existuje jich  $p$  a v případě, že  $p \in \mathbb{N}$ , jich neexistuje  $p+1$ ).
- Říkáme, že  $f$  je **přesně  $p$ -značná**, pokud je  $p$ -značná v každém bodě  $a \in \text{dom}(f)$ .
- Říkáme, že  $f$  je  **$p$ -značná**, pokud

$$p = \sup\{q \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} : \exists a \in \text{dom}(f), f \text{ je } q\text{-značná v bodě } a\}.$$

(1) 1-značné funkce nazýváme **jednoznačné**.

**Poznámka.** Je-li  $f$   $p$ -značná v bodě  $a$ , pak množina  $f(a)$  má nejvýše  $p$  prvků. Může mít méně než  $p$  prvků.

**Poznámka.** V případě, že  $\Omega = \mathbb{C}$ , říkáme místo „analytické pokračování v  $\mathbb{C}$ “ pouze **analytické pokračování**. Podobně říkáme jen **analytické pokračování podél  $\gamma$**  nebo **analytická funkce**.