

I.3 Hardyho prostory na jednotkovém disku

Definice. Necht' $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty)$ funkce. Funkce u se nazývá subharmonická, jestliže je shora polospojité a navíc pro každé $a \in \Omega$ a $R > 0$ takové, $\overline{U(a, R)} \subset \Omega$, platí

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it}) dt,$$

přičemž integrál vpravo není roven $-\infty$.

Věta 13. Necht' $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f \in H(\Omega)$ není konstantní nulová funkce. Pak funkce $\log |f|$, $\log^+ |f|$ a $|f|^p$ ($p \in (0, +\infty)$) jsou subharmonické na Ω .

Poznámka: V předchozí větě klademe $\log 0 = -\infty$ a $\log^+ t = (\log t)^+ = \max\{\log t, 0\}$ pro $t \in [0, \infty)$.

Věta 14. Necht' $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená a u je funkce subharmonická na Ω . Necht' $a \in \Omega$ a $R > 0$ je takové, že $\overline{U(a, R)} \subset \Omega$. Necht' h je funkce spojitá na $\overline{U(a, R)}$ a harmonická na $U(a, R)$. Pokud platí $u \leq h$ na kružnici $|z - a| = R$, pak $u \leq h$ na $U(a, R)$.

Značení:

- $\mathbb{D} = U(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

Pro $f \in H(\mathbb{D})$ a $r \in [0, 1)$ označme:

- $M_0(f, r) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \right)$
- $M_p(f, r) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}$ ($0 < p < \infty$)
- $M_\infty(f, r) = \sup_{\theta \in [-\pi, \pi)} |f(re^{i\theta})|$

Věta 15. Necht' $f \in H(\mathbb{D})$ a $p \in [0, \infty]$. Pak funkce

$$r \mapsto M_p(f, r)$$

je neklesající na $[0, 1)$.

Definice.

- Pro $f \in H(\mathbb{D})$ a $p \in [0, \infty]$ označme

$$\|f\|_p = \sup_{r \in [0, 1)} M_p(f, r) = \lim_{r \rightarrow 1^-} M_p(f, r).$$

- Pro $p \in (0, \infty]$ označme

$$H^p = \{f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_p < \infty\}.$$

- Dále označme

$$N = \{f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_0 < \infty\}.$$

Poznámka. Pro $0 < s < p \leq \infty$ platí $H^p \subset H^s \subset N$.

Věta 16. Pro $p \in [1, \infty]$ je $(H^p, \|\cdot\|_p)$ Banachův prostor.

Věta 17. Necht' $f \in H(\mathbb{D})$ splňuje

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Pak platí:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

Pokud navíc $f \in H^2$, pak platí:

- (1) Pro skoro všechna $t \in [0, 2\pi)$ existuje limita $f^*(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{it})$.
- (2) $f^* \in L^2(\mathbb{T})$
- (3) Pro $n \in \mathbb{Z}$ necht' $\varphi_n(e^{it}) = e^{int}$, $t \in [-\pi, \pi)$. Pak $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální báze $L^2(\mathbb{T})$ a vyjádření f^* vůči této bázi je

$$f^* = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n$$

- (4) $\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{it}) - f(re^{it})| dt = 0$.
- (5) $f = P[f^*]$
- (6) Necht' γ je kladně orientovaná jednotková kružnice. Pak

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f^*(w)}{w - z} dw, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Důsledek. H^2 je Hilbertův prostor a zobrazení $f \mapsto f^*$ je izometrie H^2 na uzavřený podprostor $L^2(\mathbb{T})$ generovaný funkcemi φ_n , $n \geq 0$. (Tento podprostor je tvořen všemi $g \in L^2(\mathbb{T})$, jejichž koeficienty u φ_n , $n < 0$, ve vyjádření vůči ortonormální bázi φ_n , $n \in \mathbb{Z}$ jsou nulové, tj. pro které platí $\hat{g}(n) = 0$ pro $n < 0$.)

Věta 18. Necht' $p \in [1, \infty)$ a $f \in H^p$. Pak pro skoro všechna $t \in [0, 2\pi)$ existuje limita $f^*(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{it})$. Navíc platí:

- (1) $f^* \in L^p(\mathbb{T})$
- (2) $\|f^*\|_p = \|f\|_p$
- (3) $\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{it}) - f(re^{it})|^p dt = 0$.
- (4) $f = P[f^*]$
- (5) Necht' γ je kladně orientovaná jednotková kružnice. Pak

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f^*(w)}{w - z} dw, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Věta 19. Necht' $f \in H(\mathbb{D})$ a $p \in [1, \infty]$. Pak $f \in H^p$, právě když existuje $g \in L^p(\mathbb{T})$ taková, že $\hat{g}(n) = 0$ pro všechna $n < 0$ a $f = P[g]$.