Absolutní hodnota a její význam

1. Nechť $x, y, c \in \mathbf{R}$, přičemž $c > 0$. Pak $|x - y| < c$, právě když $x \in (y - c, y + c)$.
2. Vyjádřete analogicky vztahy $|x - y| \leq c$, $|x - y| > c$, $|x - y| \geq c$.
3. Vyjádřete jednoduše množinu $\{x \in \mathbf{R} : ||||x| - 1| - 2| - 3| < 1\}$.

Důkazy metodou matematické indukce

4. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
5. Pro každé $n \in \mathbf{N} \setminus \{3\}$ platí $n^2 \leq 2^n$.
6. Nechť $n, k \in \mathbf{N}$. Pak existují $q, r \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, pro která platí $r < k$ a $n = qk + r$. (Dělení se zbytkem)
7. Nechť $n \in \mathbf{N}$ a $a_1, \ldots, a_n$ jsou nezáporná čísla. Pak platí

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n},$$

přičemž rovnost nastává jen v případě, že jsou všechna čísla $a_1, \ldots, a_n$ stejná. (Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem, AG nerovnost)

Výroky, výrokové spojky, kvantifikátory a jejich použití

8. Vyjádřete jednoduše množinu $\{a \in \mathbf{R} : (\forall x \in \mathbf{R})(|x - 2| \leq 1 \Rightarrow x^2 - ax > 5)\}$.
9. Uvažme následující výroky:

(i) $(\forall x \in M)(\exists y \in M)(\exists z \in M)(x = y + z)$
(ii) $(\exists y \in M)(\forall x \in M)(\exists z \in M)(x = y + z)$
(iii) $(\exists y \in M)(\exists z \in M)(\forall x \in M)(x = y + z)$

Které z nich jsou pravdivé a které nepravdivé, je-li
a) $M = \mathbf{N}$, b) $M = \mathbf{N} \cup \{0\}$, c) $M = (0, 1)$, d) $M = \{0\}$?
10. Jsou pravdivé následující výroky?

a) $(\forall a \in \mathbf{R})(\exists \varepsilon > 0)(\exists \alpha \in \mathbf{R})(\forall x \in \mathbf{R})(x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1)$
b) $(\exists a \in \mathbf{R})(\forall \varepsilon > 0)(\forall \alpha \in \mathbf{R})(\exists x \in \mathbf{R})(x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1)$

Napište negace těchto výroků.
11. Vyjádřete co nejjednodušeji vztah mezi čísly $a, b \in \mathbf{R}$ určený formulí:

a) $(\forall c > 0)(\forall x \in \mathbf{R})(|a - x| < c \Rightarrow |b - x| < c)$,
b) $(\forall c > 0)(\forall x \in \mathbf{R})(a - x < c \Rightarrow |b - x| < c)$,
c) $(\forall c > 0)(\forall x \in \mathbf{R})(|a - x| < c \Rightarrow b - x < c)$,
d) $(\forall c > 0)(\forall x \in \mathbf{R})(a - x < c \Rightarrow b - x < c)$,
e) $(\forall x \in \mathbf{R})(\exists u > 0)(\forall c \in (0, u))(|a - x| < c \Rightarrow |b - x| < u)$.

Infimum a supremum

12. Nechť $A \subset \mathbf{R}$ je neprázdná množina. Předpokládejme, že má nejmenší prvek (tj. **minimum**, značíme $\min A$). Ukažte, že $\inf A = \min A$.
Analogické tvrzení zformulujte a dokažte pro největší prvek (tj. **maximum**, $\max A$).
13. Nalezněte suprema a infima (případně maxima a minima) následujících množin (pokud existují):
a) $A = \langle 0, 1)$, b) $B = \{x \in \mathbf{Q} : x > 0\}$, c) $C = \{1, -5, 7, -3, 50\}$,
d) $D = (-1, 0) \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$, e) $E = (1, 2) \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$.
14. Nechť $A, B \subset \mathbf{R}$ jsou neprázdné omezené množiny. Označme $s = \inf A$, $S = \sup A$, $t = \inf B$, $T = \sup B$.
(a) Vyjádřete $\inf(A \cup B)$ a $\sup(A \cup B)$ pomocí hodnot s, S, t, T.
(b) Lze něco říci o $\inf(A \cap B)$ a $\sup(A \cap B)$?
(Uvažte případ, kdy $A = (-1, 1)$ a $B = \{-1, 1\}$ nebo $B = \{-1, 0, 1\}$ nebo $B = \{-1, 0, \frac{1}{2}\}$.)

Limita posloupnosti

15. Spočtěte následující limity posloupností:
(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}$, (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}-\frac{7}{n^5}}{7-\frac{3}{n^2}}$, (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+7}{5n+3}$, (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+7)}{n^2+5n+15}$,
(e) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+15} - \sqrt{n+1})$, (f) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+5n-1} - \sqrt{n^2+3})$, (g) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+1}-n}{\sqrt[4]{n^4+1}-\sqrt{n^2+1}}$,
(h) $\lim_{n\to\infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}$, (i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+5^n}$.
16. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost kladných čísel splňující $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ nebo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
17. Pomocí uvedeného tvrzení spočtěte limity:
(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$, (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{n!}$, (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^5+2^n+17^n}{n!+n+3^n}$.
18. Pomocí věty o limitě monotónní posloupnosti spočtěte limity:
(a) $\lim_{n\to\infty} z^n$, $z \in \langle 0, \infty)$,
(b) $\lim_{n\to\infty} a_n$, kde $a_1 = 0$ a $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{k}$ (kde $k > 1$ je parametr),
(c) $\lim_{n\to\infty} a_n$, kde $a_1 = 0$ a $a_{n+1} = \frac{1-a_n}{2}$.

Ještě limita posloupnosti

19. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel, $a \geq 0$ a $p \in \mathbf{N}$. Pak platí:
(a) $a_n \to a \Leftrightarrow a_n^p \to a^p \Leftrightarrow \sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$.
(b) $a_n \to +\infty \Leftrightarrow a_n^p \to +\infty \Leftrightarrow \sqrt[p]{a_n} \to +\infty$.
20. Některé příklady ze zkouškových písemek z minulých let:

(a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(2+\frac{1}{n})^{100} - (4-\frac{3}{n})^{50}}{(8-\frac{1}{n})^{34} - (4+\frac{1}{n})^{51}}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{[\sqrt[3]{n^3-1}] + [\sqrt[3]{n^3+1}]}{\sqrt[n]{1+2^n+\cdots+n^n}}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[4]{n^4+4n^3} - n\right]$ (d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+\sin^2 n} - \sqrt{n-\cos^2 n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+7)^{50} - (n^2+1)^{25}}{\sqrt{n^{100}+n^{99}-1} - \sqrt{n^{100}+2n^{99}+1}}$

Reálné funkce reálné proměnné

21. Nechť f, g jsou funkce spojité v bodě $a \in \mathbf{R}$. Pak i funkce $\max\{f,g\}$ a $\min\{f,g\}$ jsou spojité v bodě a.
Funkce $\max\{f,g\}$ je definována takto:

$$\max\{f,g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \qquad x \in D_f \cap D_g.$$

Stejné tvrzení platí i pro spojitost zleva a zprava.
22. Určete ve kterých bodech jsou spojité (případně zleva, zprava) funkce:
(a) $f(x) = \max\{x, x^2\}$ (b) $f(x) = \min\{x, \operatorname{sgn} x\}$

Limita funkce

23. Spočtěte následující limity:
(a) $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{x^2+x}{x^3+1}$, (b) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{x^2-x}$, (c) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$, (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot(\sqrt{1+x^2}+x)$,
(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x}$, (f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x}$, (g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos^2 x+3\cos x-2}{2\cos^2 x-5\cos x+2}$,
(h) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$, (i) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$, (j) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (x-\frac{\pi}{2})\cdot\operatorname{tg} x$, (k) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(\sin(\sin x))}{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)}\cdot x^k$, $k\in\mathbf{Z}$,
(l) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\log(x^2)}{x^3-1}$, (m) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\log\dfrac{x^2+1}{x^2+5}$, (n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log(x^3+15)}{\log(x^{15}+3)}$, (o) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{10^x-2^x}{x}$,
(p) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x+1}{x+3}\right)^{5x-x^2}$, (q) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{2^x+8^x}{2}\right)^{1/x}$.

Počítání limit – některé příklady z minulých písemek

24. (a) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{e^{x^6}-1}}{x\log\cos x}$, (b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \log\sin x\cdot\operatorname{tg}^2 x$, (c) $\lim\limits_{x\to0+} \frac{e^x-e^{\sqrt{x}}}{1-\cos\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}$,
(d) $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}\pi} (4x^2-9\pi^2)\cdot\frac{\cos x}{1+\sin x}$, (e) $\lim\limits_{x\to0+} \frac{\arccos(e^{-x})}{\sqrt{x}}$,
(f) $\lim\limits_{n\to\infty} (\log(n^6+5n^3+1)-\log(n^6+1))(n^3+\cos n)$, (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2^n}{n^8+2^n}\right)^{2^n/n^8}$,
(h) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+2x}-x)^x$, (i) $\lim\limits_{x\to0} \frac{3^{2^{x+1}-2}-1}{\sqrt{1-\cos x}}$, (j) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(2^{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x}}-2^{1/x})$.

Spojitost a derivace funkcí

25. Pro následující funkce vyšetřete spojitost a spočtěte derivaci, včetně jednostranných:
(a) $(x^8+x^6-1)^{157}$, (b) $\sin(x^3\cos(\log x))$, (c) $\frac{e^{x^5}\cos(x+7)}{\log(x^4+1)}$,
(d) x^x (jak funkci definovat v nule?), (e) x^{x^x}, (f) $\arcsin(\sin x)$, (g) $\arcsin\frac{4x}{x^2+4}$,
(h) $\max\{x^2, x^3+\operatorname{sgn} x\}$, (i) $(x+2)^2\sqrt{|x^2-4|}$, (j) $\sqrt{e^{\sin^2 x}-1}$, (k) $\min\{x^2, \sqrt[3]{x}\}$,
(l) $\arcsin\min\{1, \frac{1}{x}\}$, (m) $\cos x\cdot[\sin x]$, (n) $\sqrt[3]{2-\sqrt{x}}$.

Průběh funkce

26. Vyšetřete průběhy následujících funkcí:
(a) $\log\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$, (b) $\sqrt[5]{3x^5+5x^3}$, (c) $\sqrt[5]{1-\sqrt{x+1}}$, (d) $\sin x+\dfrac{1}{6\sin x}$, (e) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{5}}{4\cos^2 x}$,
(f) $\dfrac{e^{|x|}}{|e^x-3|}$, (g) $\sqrt{x}+\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$, (h) $x^{2-3\log x}$, (i) $\dfrac{4^x-\frac{5}{2}}{(2^x-2)^2}$.