Řešení soustav lineárních rovnic

Metody řešení

Metoda inverzní matice: Máme-li soustavu $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, kde $\mathbb{A}$ je regulární matice, pak jediné řešení má tvar $\boldsymbol{x} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

Tato metoda je použitelná jen v případě, že počet neznámých je stejný jako počet rovnic a navíc je matice soustavy regulární. V jiných případech použitelná není.

Tato metoda je vhodná v případě, že víme, že matice soustavy je regulární, a navíc chceme soustavu řešit pro větší množství různých vektorů pravých stran. Pak se vyplatí spočítat inverzní matici a použít uvedený vzorec.

Pokud chceme soustavu řešit jen pro jeden vektor pravých stran (či několik málo vektorů), bývá výhodnější metoda eliminace (viz níže), která je početně jednodušší než výpočet inverzní matice a následné násobení.

Cramerovo pravidlo: Máme-li soustavu $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, kde $\mathbb{A}$ je regulární matice, Věta VI.17 nám dává vzorec pro řešení.

Tato metoda dá jednoduchý vzorec pro soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, pro rozsáhlejší soustavy se moc nehodí, protože její použití pro soustavu n rovnic o n neznámých by vyžadovalo výpočet $n+1$ determinantů matic řádu n. To může být užitečné pro případ, kdy matice soustavy má nějaký velmi speciální tvar. Nicméně, jak bylo vysvětleno dříve, význam Věty VI.17 je spíše teoretický.

Metoda eliminace: Napíšeme si rozšířenou matici soustavy $(\mathbb{A}|\boldsymbol{b})$ a nějakou transformací ji převedeme na schodovitou matici $(\mathbb{A}'|\boldsymbol{b}')$. Pak vyřešíme soustavu $\mathbb{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$.

Převádět matici na schodovitou již umíme, zbývá se naučit vyřešit soustavu $\mathbb{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$, pokud $(\mathbb{A}'|\boldsymbol{b}')$ je schodovitá matice.

To děláme „odzadu“. Nejprve z tvaru poslední rovnice poznáme, zda soustava má řešení nebo ne.

Pokud poslední rovnice (myšleno poslední z rovnic, které něco požadují, tedy nejsou tvaru $0 = 0$) má tvar $0 = c$, kde c je nenulové číslo, pak soustava nemá řešení. V ostatních případech má řešení. Toto rozlišení odpovídá ekvivalenci (1) $\Leftrightarrow$ (2) z Věty VI.16.

Dále předpokládejme, že soustava má řešení. Pak všechna řešení najdeme postupným výpočtem od poslední rovnice k první. Nejprve si to popišme na speciálním případu.

Předpokládejme, že počet neznámých (n) se rovná hodnosti matice soustavy (a také hodnosti rozšířené matice soustavy). To znamená, že počet nul, jimiž začínají řádky matice $(\mathbb{A}'|\boldsymbol{b}')$ je postupně $0, 1, 2, \ldots n-1$ pro prvních n řádků a další řádky (pokud nějaké další jsou) jsou již nulové. V tomto případě má soustava právě jedno řešení – z poslední rovnice vyjádříme x_n, z předposlední x_{n-1} (s využitím znalosti x_n), a tak dále, až z první rovnice vyjádříme x_1 (s využitím toho, že již známe hodnoty ostatních neznámých).

Pokud počet neznámých je větší než hodnost matice soustavy (která se rovná hodnosti rozšířené matice soustavy), má soustava nekonečně mnoho řešení. Najdeme je pomocí mírné modifikace postupu použitého v důkazu implikace (2) $\Rightarrow$ (1) z Věty VI.16:

Když jsme popisovali, jak najít jedno řešení, postupovali jsme odzadu tak, že za některé neznámé jsme zvolili 0 a ostatní jsme dopočítali. Modifikace spočívá v tom, že místo toho, abychom za patřičné neznámé zvolili 0, mohou nabývat libovolných hodnot, což vyjádříme volbou patřičného počtu parametrů. Ilustrujeme me to na stejném příkladu:

Nechť

$$(\mathbb{A}'|\boldsymbol{b}') = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hodnost matice soustavy i rozšířené matice soustavy je 3. Této matici odpovídá soustava

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4 + x_5 + 7x_6 &= 1 \\ 3x_3 + x_4 \qquad + x_6 &= 0 \\ 5x_6 &= 2 \end{aligned}$$

Ze třetí rovnice dostaneme

$$x_6 = \frac{2}{5}. \qquad (*)$$

Z druhé rovnice vyjádříme

$$x_3 = -\frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_6.$$

Hodnotu x_6 již známe, dostaneme tedy

$$x_3 = -\frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{15}. \tag{$**$}$$

Z první rovnice vyjádříme

$$x_1 = 1 - 7x_6 - x_5 - 3x_4 - 2x_2.$$

Dosadíme za x_6 podle ($*$). (A také za x_3 podle ($**$), ale to v tomto případě není nutné, protože ve vzorci pro x_1 se nevyskytuje x_3.) Tím dostaneme

$$x_1 = 1 - \frac{14}{5} - x_5 - 3x_4 - 2x_2 = -\frac{9}{5} - x_5 - 3x_4 - 2x_2. \tag{$***$}$$

Všechna řešení jsou dána rovnostmi ($*$), ($**$) a ($***$). Množina všech řešení je tedy

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} - x_5 - 3x_4 - 2x_2 \\ x_2 \\ -\frac{2}{15} - \frac{1}{3}x_4 \\ x_4 \\ x_5 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} ; x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Hodnoty x_2, x_4, x_5 mohou být libovolné, plní úlohu parametrů. Můžeme pro ně zvolit i jiné označení, takže se lze setkat třeba se zápisem

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} - s - 3t - 2u \\ u \\ -\frac{2}{15} - \frac{1}{3}t \\ t \\ s \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} ; s, t, u \in \mathbb{R} \right\}.$$

Řešení příkladů 17–19 ze supersemináře

Příklad 17. Najděte všechna řešení soustavy $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ pro následující matici $\mathbb{A}$ a tři vektory pravých stran.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Použijeme metodu eliminace. Abychom ji nemuseli dělat třikrát, budeme uvažovat „třikrát rozšířenou“ matici soustavy – k matici $\mathbb{A}$ přidáme tři uvedené sloupce pravých stran a úpravy budeme dělat na celou matici typu 3×6.

$$\begin{array}{r} \\ -2. \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 12 & 16 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} \\ -7. \\ +1. \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -10 & -8 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & -12 & -14 & -24 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -2 \end{array}\right)$$

Nyní vidíme, že pro pravé strany $\boldsymbol{b}_2$ a $\boldsymbol{b}_3$ nemá soustava řešení. (To plyne z Věty VI.16; také přímo z toho, že třetí rovnice má v těchto případech tvar $0 = -5$ resp. $0 = -2$.)

Pro pravou stranu $\boldsymbol{b}_1$ soustava má řešení (hodnost matice soustavy i rozšířené matice soustavy je 2). K tomu, abychom našli všechna řešení nejprve přepíšeme matici na soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ -6x_2 - 12x_3 &= -14 \end{aligned}$$

Z druhé rovnice vyjádříme

$$x_2 = \frac{7}{3} - 2x_3 \tag{$\circ$}$$

Z první rovnice vyjádříme

$$x_1 = 4 - 2x_2 - 3x_3.$$

Dosadíme za x_2 podle ($\circ$) a dostaneme

$$x_1 = 4 - \frac{14}{3} + 4x_3 - 3x_3 = -\frac{2}{3} + x_3. \tag{$\circ\circ$}$$

Všechna řešení jsou určena rovnostmi ($\circ$) a ($\circ\circ$).

Závěr: Pro pravé strany $\boldsymbol{b}_2$ a $\boldsymbol{b}_3$ soustava nemá řešení. Pro pravou stranu $\boldsymbol{b}_1$ má soustava nekonečně mnoho řešení ve tvaru

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}+t \\ \frac{7}{3}-2t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Příklad 18. Najděte všechna řešení soustavy $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ pro následující matici $\mathbb{A}$ a dva vektory pravých stran.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 0 & 7 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Budeme postupovat podobně jako v Příkladu 17, použijeme metodu eliminace na „dvakrát rozšířenou“ matici soustavy.

$$\begin{array}{r} \\ -2. \\ -9. \\ -2. \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 0 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} \\ \\ +9. \\ +2. \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -9 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{r} \\ \\ .1/8 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 16 & 24 & 32 & 40 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 9 & 12 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} \\ \\ \\ -2. \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 9 & 12 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Nyní je zřejmé, že $\mathbb{A}$ je regulární a že soustava má pro každou pravou stranu právě jedno řešení. To najdeme tak, že si matici přepíšeme na soustavu.

Pro $\boldsymbol{b}_1$ máme soustavu:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ x_3 \ + \ x_4 \ &= 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 2x_3 + 3x_4 &= 4 \\ -\ 2x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Tu řešíme odzadu:

$$
\begin{aligned}
x_4 &= -\frac{1}{2},\\
x_3 &= 2 - \frac{3}{2}x_4 = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4},\\
x_2 &= 4 - 3x_4 - 2x_3 = 4 + \frac{3}{2} - \frac{11}{2} = 0,\\
x_1 &= 1 - x_4 - x_3 - x_2 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{11}{4} - 0 = -\frac{5}{4}.
\end{aligned}
$$

Pro $\boldsymbol{b}_2$ máme soustavu:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \ x_3 \ + \ x_4 \ &= 1\\
x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 5\\
2x_3 + 3x_4 &= 5\\
-\ 2x_4 &= 2.
\end{aligned}
$$

I tu řešíme odzadu:

$$
\begin{aligned}
x_4 &= -1,\\
x_3 &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_4 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4,\\
x_2 &= 5 - 3x_4 - 2x_3 = 5 + 3 - 8 = 0,\\
x_1 &= 1 - x_4 - x_3 - x_2 = 1 + 1 - 4 - 0 = -2.
\end{aligned}
$$

Závěr: Pro pravou stranu $\boldsymbol{b}_1$ je jediné řešení $\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ 0 \\ \frac{11}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, pro pravou stranu $\boldsymbol{b}_2$ je jediné řešení $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Jiná možnost řešení: V okamžiku, kdy jsme zjistili, že $\mathbb{A}$ je regulární, mohli jsme v řádkových úpravách pokračovat dále, až bychom $\mathbb{A}$ převedli na jednotkovou matici. Pak bychom na místě pravých stran dostali řešení. Výpočet by vypadal například takto:

$$\begin{array}{r} \\ \\ .1/2 \\ .(-1/2) \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} -1. \\ -3. \\ -3/2. \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{r} -1. \\ -2. \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{11}{2} & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{11}{4} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} -1. \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{11}{4} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{11}{4} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{array}\right)$$

Vidíme, že jsme dostali stejný výsledek.

Příklad 19. Pro která $\boldsymbol{b}$ má soustav $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ řešení? Najděte všechna řešení pro uvedený vektor pravých stran.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pro odpověď na první otázku použijeme Větu VI.16. Napíšeme si rozšířenou matici soustavy pro obecný vektor pravých stran a pomocí řádkových úprav převedeme na schodovitou matici.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & b_2 \\ 1 & 4 & 3 & 4 & b_3 \\ 5 & 4 & 1 & -8 & b_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & b_3 - b_1 \\ 0 & -6 & -9 & -18 & b_4 - 5b_1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & b_3 + b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & b_4 - 3b_2 + b_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & b_3 + b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 - 3b_3 - 6b_2 + 10b_1 \end{array}\right)$$

Vidíme, že hodnost matice soustavy je 3. Pokud $b_4 - 3b_3 - 6b_2 + 10b_1 \neq 0$, pak hodnost rozšířené matice soustavy je 4, tedy soustava nemá řešení. Pokud $b_4 - 3b_3 - 6b_2 + 10b_1 = 0$, pak hodnost rozšířené matice soustavy je také 3, tedy soustava má řešení.

Z toho dostáváme odpověď na první otázku:

Soustava má řešení, právě když $b_4 - 3b_3 - 6b_2 + 10b_1 = 0$.

Nyní se podívejme na určenou pravou stranu. Uvedenou podmínku splňuje, proto řešení existuje. Všechna řešení najdeme metodou eliminace. Protože jsme eliminaci prováděli pro obecnou pravou stranu, nemusíme ji provádět znovu od začátku, stačí dosadit za $\boldsymbol{b}$ do výsledku:

$$\left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 1 - 2 \cdot 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 + 1 - 3 \cdot 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 - 3 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 10 \cdot 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nyní si matici přepíšema na soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 1 \\ - 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 &= -1 \\ - x_3 - 2x_4 &= -1. \end{aligned}$$

Tuto soustavu řešíme odzadu:

$$\begin{aligned} &x_3 = 1 - 2x_4, \\ &x_2 = \frac{1}{2} - x_3 - 2x_4 = \frac{1}{2} - 1 + 2x_4 - 2x_4 = -\frac{1}{2}, \\ &x_1 = 1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1 + 1 - 2 + 4x_4 - 2x_4 = 2x_4. \end{aligned}$$

Všechna řešení jsou tedy tvaru

$$\begin{pmatrix} 2t \\ -\frac{1}{2} \\ 1 - 2t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$