Vyšetřování konvergence číselných řad

Metody řešení

- Cílem v příkladech, kterými se budeme zabývat, je zjistit, která z následujících možností pro zadanou řadu platí:
  - Řada konverguje absolutně.
  - Řada konverguje neabsolutně.
  - Řada diverguje.

  Pokud zadaná řada závisí na nějakém parametru (parametrech), znamená to zjistit, pro které hodnoty parametrů nastávají jednotlivé možnosti.

- Pokud má řada nezáporné členy, pak buď konverguje absolutně nebo diverguje, nemůže konvergovat neabsolutně.

- Pro vyšetření konvergence řady neexistuje žádný univerzální algoritmus, je to do značné míry tvůrčí činnost.

  Máme několik nástrojů (kritérií). Které použijeme, se musíme rozhodnout sami na základě vlastního odhadu a zkušenosti. Pokud nám zvolené kritérium nepomůže, řešení nekončí, ale musíme zvolit nějaké jiné, vhodnější.

  Kritéria, která máme k dispozici, jsou tato:

  Nutná podmínka konvergence: Pokud $a_n \not\to 0$, pak řada $\sum_n a_n$ diverguje.

  To se hodí, pokud tušíme, že posloupnost členů řady nemá limitu nula. Pokud limita ovšem nula vyjde, nedá nám to žádnou informaci.

  Odmocninové kritérium: To znamená použít Větu VII.6.

  To stojí za zkoušku zejména tehdy, když členy řady jsou vyjádřeny pomocí n-té mocniny z nějakého výrazu, a tedy n-tá odmocnina má jednoduchý tvar.

  Použít se dá, pokud spočteme $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ a tato limita nevyjde 1.

  Pokud limita vyjde 1, toto kritérium nám nic nedá a musíme zvolit jiné.

  Pokud limita neexistuje, můžeme zkusit použít i nelimitní verzi.

Podílové kritérium: To znamená použít Větu VII.7.

To stojí za zkoušku zejména tehdy, když se ve výrazu pro členy řady vyskytují n-té mocniny či faktoriály, a tedy při počítání podílu $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ se leccos zkrátí.

Použít se dá, pokud spočteme $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ a tato limita nevyjde 1.

Pokud limita vyjde 1, toto kritérium nám nic nedá a musíme zvolit jiné.

Pokud limita neexistuje, můžeme zkusit použít i nelimitní verzi.

Doplňující poznámka: Pokud zjistíme, že nejde použít odmocninové či podílové kritérium z toho důvodu, že limita vyjde 1, nemá smysl zkoušet druhé z těchto kritérií, protože také nepůjde použít.

Platí totiž následující tvrzení:

Pokud existuje $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, pak existuje i limita $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ a její hodnota je stejná.

Kombinace srovnávacího kritéria a Věty VII.8: Pro řadu s nezápornými členy můžeme její členy porovnat se škálou $\frac{1}{n^\alpha}$. To znamená zjistit, zda nastává jeden z následujících příkladů:

- Existuje $\alpha \in \mathbb{R}$, že a_n je „zhruba stejně velké jako“ $\frac{1}{n^\alpha}$.
  V tom případě $\sum_n a_n$ konverguje, právě když $\alpha > 1$.
- Existuje $\alpha > 1$, že a_n je „vpodstatě menší než $\frac{1}{n^\alpha}$“.
  Pak $\sum_n a_n$ konverguje.
- a_n je „vpodstatě větší než $\frac{1}{n}$“.
  Pak $\sum_n a_n$ diverguje.

Vyjádření v uvozovkách jsou intuitivní, jejich přesný význam je dán tím, že lze použít Věta VII.3, Věta VII.3' nebo Věta VII.5.

Leibnizovo kritérium: Věta VII.9 je jediným obecným prostředkem, který máme pro důkaz neabsolutní konvergence. Není jediným existujícím kritériem, ale jinými se zabývat nebudeme.

Použití aritmetických operací s řadami: Tj. použití Větičky VII.2, jak bylo ilustrováno v komentáři k ní.

Příklad 20 ze supersemináře: V zadaných příkladech je třeba rozhodnout, zda daná řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně či diverguje. (Nejprve si ukážeme řadu příkladů, v níž se neabsolutní konvergence nevyskytuje. Na první pohled to samozřejmě nemusí být zřejmé.)

Příklad (a): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)!(2n+1)!(-7)^n}{(3n)!}$

- Úvodní úvahy: Členy řady nejsou nezáporné, ale pravidelně střídají znaménka. Nejprve tedy vyšetříme absolutní konvergenci.

  Členy řady jsou definovány jako součin a podíl výrazů s faktoriály a mocninami. Zdá se tedy přirozené zkusit použít podílové kritérium.

- Pokus o použití podílového kritéria:
  Máme $a_n = \frac{(n+5)!(2n+1)!(-7)^n}{(3n)!}$, tedy $|a_n| = \frac{(n+5)!(2n+1)!\cdot 7^n}{(3n)!}$. Počítejme:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{(n+1+5)!(2(n+1)+1)!\cdot 7^{n+1}}{(3(n+1))!}}{\frac{(n+5)!(2n+1)!\cdot 7^n}{(3n)!}} = \frac{(n+6)!(2n+3)!\cdot 7^{n+1}\cdot (3n)!}{(3n+3)!\cdot (n+5)!(2n+1)!\cdot 7^n}$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{(n+6)(2n+3)(2n+2)\cdot 7}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \overset{(2)}{=} \frac{(1+\frac{6}{n})(2+\frac{3}{n})(2+\frac{2}{n})\cdot 7}{(3+\frac{3}{n})(3+\frac{2}{n})(3+\frac{1}{n})}$$

$$\xrightarrow{\text{AL}} \frac{1\cdot 2\cdot 2\cdot 7}{3\cdot 3\cdot 3} = \frac{28}{27}.$$

  Komentář k výpočtu:

  (1) Zkrátili jsme výrazy, které jsou stejně barevně označené. Například jsme použili, že $(n+6)! = (n+6)(n+5)!$
  a $(3n+3)! = (3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!$.

  (2) Vykrátili jsme převládající člen, tj. n^3.

  AL znamená použití věty o aritmetice limit.

  Závěr: Limita nám vyšla $\frac{28}{27}$. Protože $\frac{28}{27} > 1$, řada diverguje.

Příklad (b): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n+700)! \cdot n! \cdot (-8)^n}$

- Úvodní úvahy jsou stejné jako v příkladu (a): Členy řady nejsou nezáporné, ale pravidelně střídají znaménka. Nejprve tedy vyšetříme absolutní konvergenci.

  Členy řady jsou definovány jako součin a podíl výrazů s faktoriály a mocninami. Zdá se tedy přirozené zkusit použít podílové kritérium.

- Pokus o použití podílového kritéria: Máme $a_n = \frac{(3n)!}{(2n+700)! \cdot n! \cdot (-8)^n}$, tedy $|a_n| = \frac{(3n)!}{(2n+700)! \cdot n! \cdot 8^n}$. Počítejme:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{(3(n+1))!}{(2(n+1)+700)! \cdot (n+1)! \cdot 8^{n+1}}}{\frac{(3n)!}{(2n+700)! \cdot n! \cdot 8^n}} = \frac{(3n+3)! \cdot (2n+700)! \cdot n! \cdot 8^n}{(2n+702)! \cdot (n+1)! \cdot 8^{n+1} \cdot (3n)!}$$
$$= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(2n+702)(2n+701)(n+1) \cdot 8} \frac{(3+\frac{3}{n})(3+\frac{2}{n})(3+\frac{1}{n})}{(2+\frac{702}{n})(2+\frac{701}{n})(1+\frac{1}{n}) \cdot 8}$$
$$\xrightarrow{AL} \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8} = \frac{27}{32}.$$

  Výpočet probíhal velmi podobně jako v příkladu (a). Tentokrát vyšla limita $\frac{27}{32}$. Protože $\frac{27}{32} < 1$, řada konverguje absolutně.

Příklad (c): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}}$

- Úvodní úvahy: Členy řady nejsou nezáporné, ale pravidelně střídají znaménka. Nejprve tedy vyšetříme absolutní konvergenci.

  Protože se v členech řady vyskytují výrazu umocněné na n-tou, zdá se přirozené zkusit použít odmocninové kritérium.

- Pokus o použití odmocninového kritéria:

  Máme $a_n = (-1)^n \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}}$, tedy $|a_n| = \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}}$. Počítejme:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{(n+2)^n}{n^{n+2}}} = \frac{n+2}{n^{\frac{n+2}{n}}} = \frac{n+2}{n^{1+\frac{2}{n}}} = \frac{n+2}{n \cdot n^{\frac{2}{n}}} = \frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt[n]{n^2}} \to 1$$

Komentář k výpočtu: Používáme běžná pravidla pro počítání s mocninami (Větička IV.26) a to, že pro $x > 0$ platí $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Také jsme vykrátili n (v předposledním kroku) a použili (kromě věty o aritmetice limit, samozřejmě), že $\sqrt[n]{n} \to 1$ (což je známá limita z kapitoly II).

Limita vyšla 1, což znamená, že odmocninové kritérium nám nepomůže a musíme zvolit jiné.

- Úvahy, co dál: Potřebujeme jemněji vyšetřit chování posloupnosti $\{|a_n|\}$, odmocninové kritérium se ukázalo být příliš hrubým nástrojem. Nabízí se zjistit, zda posloupnost členů má limitu 0, případně ji porovnat s řadami ze škály $\frac{1}{n^\alpha}$.

- Výpočet $\lim |a_n|$ a odhad velikosti $|a_n|$:

  Jest
$$|a_n| = \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}}.$$

  Čitatel i jmenovatel mají limitu $+\infty$. Je třeba zjistit, který z nich převáží a jak.

  Protože ve jmenovateli je mocnina vyšší než v čitateli, intuitivně to vypadá tak, že převáží jmenovatel.

  Zkusme to ověřit tak, že čitatel rozdělíme na součin tak, aby jeden z činitelů šel snadno porovnat se jmenovatelem:
$$|a_n| = \frac{(n+2)^n}{n^n \cdot n^2} = \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2} = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2}.$$

  Spočteme limitu prvního činitele: Máme
$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \exp(n \log(1 + \tfrac{2}{n}))$$

  a
$$\lim_{n\to\infty} n \log(1 + \tfrac{2}{n}) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\log(1+\frac{2}{n})}{\frac{2}{n}}}_{\to 1} \cdot 2 = 2,$$

  kde jsme použili Heineho větu a základní limitu pro logaritmus.

Proto

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \exp(2) = e^2.$$

Z toho tedy dostaneme, že $\lim |a_n| = e^2 \cdot 0 = 0$, a tedy nutná podmínka konvergence je splněna. To samo o sobě ještě nedává řešení našeho příkladu.

Nicméně uvedený výpočet dává přesnější informaci, totiž, že

$$\frac{|a_n|}{\frac{1}{n^2}} = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \to e^2.$$

Protože limita je vlastní a $\sum_n \frac{1}{n^2}$ konverguje, podle Věty VII.5 řada konverguje absolutně.

Příklad (d): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\sin\frac{1}{n}\right)^{(n^2)}$.

- Úvodní úvahy: Řada má kladné členy. (Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{n} \in (0,1\rangle \subset (0,\pi)$, proto $\sin\frac{1}{n} \in (0,1)$. Tedy $1-\sin\frac{1}{n} > 0$, a tedy členy řady jsou definované a kladné.)

  Proto konvergence a absolutní konvergence znamenají pro tuto řadu totéž.

  Členy řady jsou ve tvaru „něco na n^2“. Jejich n-tá odmocnina je tedy ve tvaru „něco na n“, a proto má jednoduchý tvar. Nabízí se zkusit odmocninové ktritérium.

- Pokus o použití odmocninového kritéria:

  Máme $|a_n| = a_n = \left(1-\sin\frac{1}{n}\right)^{(n^2)}$, a tedy

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(1-\sin\frac{1}{n}\right)^{(n^2)}} = \left(1-\sin\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\log\left(1-\sin\frac{1}{n}\right)\right).$$

Abychom spočetli limitu, spočteme nejprve limitu exponentu:

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(1-\sin\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot \underbrace{\frac{\log\left(1-\sin\frac{1}{n}\right)}{-\sin\frac{1}{n}}}_{\to 1 \text{ (Heine)}} \cdot \left(-\sin\frac{1}{n}\right)$$

$$\overset{\text{AL}}{=} 1\cdot \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(-\sin\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} - \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}_{\to 1 \text{ (Heine)}} = -1.$$

Proto platí

$$\sqrt[n]{|a_n|} \to \exp(-1) = \frac{1}{e}.$$

Protože $\frac{1}{e} < 1$, dostáváme, že řada konverguje absolutně.

Příklad (e): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3-1})$.

- Úvodní úvahy: Řada má kladné členy. (Je totiž zřejmé, že pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí $n^3+n > n^3-n \geq 0$ a druhá odmocnina je rostoucí na $\langle 0,+\infty)$.) Proto konvergence a absolutní konvergence znamenají pro tuto řadu totéž.

  Je tedy potřeba řadu porovnat s nějakou ze známých řad, nabízí se škála $\frac{1}{n^\alpha}$.

  Používat odmocninové nebo podílové kritérium nemá smysl, protože se ve vzorci pro řadu nevyskytuje nic ve tvaru „něco na n“ ani faktoriály.

- Odhad velikosti a_n:

  Máme $a_n = \sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3-1}$. Je to rozdíl dvou výrazů, které mají limitu $+\infty$. Protože oba výrazy jsou vyjádřeny pomocí druhé odmocniny, nabízí se použít metodu vhodného rozšíření, známou z počítání limit.

  Jest

$$a_n = \sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3-1} = (\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3-1})\cdot\frac{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3-1}}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3-1}}$$
$$= \frac{(n^3+n)-(n^3-1))}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3-1}} = \frac{n+1}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3-1}}.$$

Nyní použijeme další metodu známou z počítání limit – vytknutí a vykrácení převládajícího členu. V čitateli je převládající člen n, ve jmenovateli $\sqrt{n^3} = n^{\frac{3}{2}}$.

Máme tedy

$$a_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3-1}} = \frac{n(1+\frac{1}{n})}{\sqrt{n^3}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \underbrace{\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}}}_{\to\frac{1}{2}}.$$

Dostáváme tedy, že $a_n \to 0$, nutná podmínka konvergence je splněna. Tato informace však nestačí k vyřešení příkladu.

Nicméně uvedený výpočet dává přesnější informaci, totiž, že

$$\frac{a_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}} \to \frac{1}{2}.$$

Protože limita je vlastní a nenulová a $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje (dle Věty VII.8, protože $\frac{1}{2} < 1$), podle Věty VII.5 řada diverguje.

Příklad (f): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log(n+1)}$.

- Úvodní úvahy: Řada má kladné členy. Proto konvergence a absolutní konvergence znamenají pro tuto řadu totéž.

  Je tedy potřeba řadu porovnat s nějakou ze známých řad. Protože $\log(n+1) \to +\infty$, členy řady budou „výrazně menší než $\frac{1}{n^2}$“. Protože $\sum_n \frac{1}{n^2}$ konverguje, bude konvergovat i naše řada. Dokážeme to pomocí limitního srovnávacího kritéria.

- Přesný důkaz na základě uvedených úvah:

  Jest $a_n = \frac{1}{n^2 \log(n+1)}$, tedy

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\log(n+1)} \to 0.$$

Protože limita je vlastní a $\sum_n \frac{1}{n^2}$ konverguje, naše řada konverguje absolutně podle Věty VII.5.

Příklad (g): $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \log \frac{1}{n}$.

- Úvodní úvahy: Všimněme si, že sčítáme až od $n = 2$, pro $n = 1$ vzorec pro n-tý člen nedává smysl (kvůli nule ve jmenovateli).

  Máme
  $$a_n = \frac{1}{n^2-1} \log \frac{1}{n} = -\frac{\log n}{n^2-1}.$$

  Řada má tedy záporné členy. Proto konvergence a absolutní konvergence znamená pro tuto řadu totéž. (Uvědomme si, že $|a_n| = -a_n$, a tedy lze použít Větičku VII.2.)

  Budeme tedy pracovat s řadou $\sum_n |a_n|$ a pokusíme se ji srovnat s nějakou známou řadou.

- Úvahy o velikosti $|a_n|$:

  Kdybychom měli řadu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$, pak bychom ji porovnali s řadou $\sum_n \frac{1}{n^2}$ a zjistili, že konverguje (dle Věty VII.5).

  Ale v našem případě je $\frac{1}{n^2-1}$ násobeno ještě $\log n$. Protože $\log n \to +\infty$, informace z předchozího odstavce nestačí. S jejím využitím totiž dostanem pouze, že naše řada má „větší členy než konvergentní řada“, což je k ničemu.

  Z kapitoly IV ovšem víme, že „logaritmus jde do nekonečna pomaleji než libovolná mocnina“, tj. pro každé $\alpha > 0$ platí $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$.

  Zároveň si uvědomíme, že kdyby v čitateli bylo (třeba) $\sqrt{n}$ místo $\log n$, dala by se řada srovnat s řadou $\sum_n \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ a ta konverguje (Věta VII.8).

  Tyto intuitivní úvahy nás vedou k tomu, abychom zkusili řadu srovnat s $\sum_n \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

- Srovnání s $\sum_n \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$:

  Platí
  $$\frac{|a_n|}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \frac{\frac{\log n}{n^2-1}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \frac{n^{\frac{3}{2}} \log n}{n^2-1} = \frac{n^{\frac{3}{2}} \log n}{n^2(1-\frac{1}{n^2})} = \underbrace{\frac{\log n}{\sqrt{n}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}}_{\to 1} \overset{AL}{\to} 0 \cdot 1 = 0.$$

Protože limita je vlastní a řada $\sum_n \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konverguje, naše řada konvergje absolutně podle Věty VII.5.

Příklad (h): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$.

- Úvodní úvahy: Řada má kladné členy. (Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je totiž $\frac{1}{n} \in (0,1] \subset (0, \frac{\pi}{2})$, tedy $\cos\frac{1}{n} \in (0,1)$, a proto i $1-\cos\frac{1}{n} \in (0,1)$. Protože $(0,1) \subset (0,\frac{\pi}{2})$, dostáváme $\sin\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) > 0$.)

  Proto konvergence a absolutní konvergence znamenají pro tuto řadu totéž.

  Zkusíme tedy tuto řadu porovnat s některou známou řadou.

- Použití limitního srovnávacího kritéria:

  Na první pohled asi není patrné, s kterou řadou bychom tuto řadu měli srovnat. (I když lze očekávat, že to bude některá ze škály $\frac{1}{n^\alpha}$.)

  Proto použijeme limitní srovnávací kritérium k postupnému zjednodušování řady:

  Krok 1: Víme, že $1-\cos\frac{1}{n} \to 0$ a $1-\cos\frac{1}{n} > 0$. Protože $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 0$, z Heineho věty plyne, že

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1-\cos\frac{1}{n})}{1-\cos\frac{1}{n}} = 1,$$

  tedy i

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sin(1-\cos\frac{1}{n})}{n(1-\cos\frac{1}{n})} = 1.$$

  Protože limita je vlastní a kladná, z Věty VII.5(b) plyne, že

  $$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) \text{ konverguje} \\ \iff &\sum_{n=1}^{\infty} n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) \text{ konverguje.} \end{aligned} \tag{$*$}$$

Krok 2: Zkoumejme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$:

Víme, že $\frac{1}{n} \to 0$ a $\frac{1}{n} > 0$. Protože $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, z Heineho věty plyne

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2},$$

tedy i

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(1-\cos\frac{1}{n})}{n\cdot\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Protože limita je vlastní a kladná, z Věty VII.5(b) plyne, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) \text{ konverguje} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\frac{1}{n^2} \text{ konverguje.} \qquad (**)$$

Závěr: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguje. Podle $(**)$ pak diverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$, a tedy podle $(*)$ diverguje i řada ze zadání.

Řada tedy diverguje.

Příklad (i): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(n\sin\frac{1}{n}\right).$

- Úvodní úvahy:

  Protože $\frac{1}{n} \in (0,1\rangle \subset (0,\frac{\pi}{2})$, je $\sin\frac{1}{n} > 0$ pro každé $n\in\mathbb{N}$. Tedy i $n\sin\frac{1}{n} > 0$, a tedy všechny členy řady jsou definované.

  Dále, pro každé $x > 0$ platí $\sin x < x$ (to buď víme, nebo zjistíme pomocí vyšetření průběhu funkce $x - \sin x$), a tedy $\frac{\sin x}{x} < 1$. Pro $n \in \mathbb{N}$ tedy platí

  $$n\sin\frac{1}{n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} < 1,$$

  a proto

  $$\log\left(n\sin\frac{1}{n}\right) < 0.$$

  Řada má tedy záporné členy. Proto konvergence a absolutní konvergence znamená pro tuto řadu totéž. (Uvědomme si, že $|a_n| = -a_n$, a tedy lze použít Větičku VII.2.)

Budeme tedy pracovat s řadou $\sum_n |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} -\log\left(n \sin \frac{1}{n}\right)$ a pokusíme se ji srovnat s nějakou známou řadou.

- Použití limitního srovnávacího kritéria.

  Stejně jako v předchozím příkladu na první pohled asi není patrné, s kterou řadou bychom tuto řadu měli srovnat. (I když lze očekávat, že to bude některá ze škály $\frac{1}{n^\alpha}$.)

  Proto použijeme limitní srovnávací kritérium k postupnému zjednodušování řady:

  První krok: Víme, že

  $$\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

  (díky Heineho větě a tomu, že $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$). Výše jsme ukázali, že $n \sin \frac{1}{n} < 1$, a proto z toho, že $\lim_{y\to 1} \frac{\log y}{y-1} = 1$ pomocí Heineho věty dostáváme

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(n \sin \frac{1}{n}\right)}{n \sin \frac{1}{n} - 1} = 1,$$

  a tedy i

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{-\log\left(n \sin \frac{1}{n}\right)}{1 - n \sin \frac{1}{n}} = 1.$$

  Protože limita je vlastní a kladná, z Věty VII.5(b) dostáváme, že

  $$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} -\log\left(n \sin \frac{1}{n}\right) \text{ konverguje} \\ \iff &\sum_{n=1}^{\infty} (1 - n \sin \tfrac{1}{n}) \text{ konverguje.} \end{aligned} \tag{$\circ$}$$

  Druhý krok: Vyšetřujme dále řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - n \sin \frac{1}{n})$. Protože nevidíme, s čím přesně by se měla srovnat, zkusíme srovnat s řadou $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ pro obecné α.

Protože $1-n\sin\frac{1}{n} \to 0$, jak jsme ukázali výše, budeme předpokládat, že $\alpha > 0$. Počítejme:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}{(\frac{1}{n})^\alpha} \overset{\text{Heine}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{1-\frac{\sin x}{x}}{x^\alpha}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{x-\sin x}{x^{\alpha+1}} \overset{\text{l'H „}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos x}{(\alpha+1)x^\alpha}.$$

Nyní vidíme, jaká je správná volba α: Pro $\alpha = 2$ limita vyjde $\frac{1}{6}$. Protože $\frac{1}{6} \in (0,+\infty)$, podle Věty VII.5(b) dostáváme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-n\sin\tfrac{1}{n}) \text{ konverguje} \iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ konverguje.} \qquad (\circ\circ)$$

Závěr: Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konverguje. Podle $(\circ\circ)$ pak konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}(1-n\sin\frac{1}{n})$, a tedy podle $(\circ)$ konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} -\log\big(n\sin\frac{1}{n}\big)$. Řada tedy konverguje absolutně.