Doplňující cvičení ke Kapitole VII

Poznámka: Tato cvičení mohou být užitečná pro lepší pochopení látky, nejsou však nezbytně nutná pro Matematiku II. Některá z nich se budou hodit později, v Matematice III.

Nechť P je polynom stupně k a Q je polynom stupně l. Tj.

$$P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$Q(x) = b_l x^l + b_{l-1}x^{l-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \quad x \in \mathbb{R},$$

přičemž $a_k \neq 0$ a $b_l \neq 0$.

Připouštíme i případ $k = 0$ (pak P je konstantní funkce rovná a_0 a $a_0 \neq 0$) a $l = 0$ (pak Q je konstantní funkce rovná b_0 a $b_0 \neq 0$).

Cvičení 1: Předpokládejme, že Q nemá žádné kořeny v $\mathbb{N}$. Uvažme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$.

1. *Ukažte, že tato řada splňuje nutnou podmínku konvergence, právě když $l > k$.*
2. *Ukažte, že*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} \text{ konverguje} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} \text{ konverguje absolutně} \Leftrightarrow l \geq k+2.$$

`Návod pro 2.:` Spočtěte limitu $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{P(n)}{Q(n)}}{\frac{1}{n^{l-k}}}$. Z toho odvoďte nejprve, že členy řady jsou buď od jistého n_0 dále kladné nebo od jistého n_0 dále záporné. Následně použijte limitní srovnávací kritérium a Větu VII.8.

Cvičení 2:

1. *Ukažte, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_0$ je podíl $\frac{P(n)}{Q(n)}$ definován.*
2. *Ukažte, že řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ splňuje nutnou podmínku konvergence, právě když $l > k$.*
3. *Ukažte, že*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} \text{ konverguje} \Leftrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} \text{ konverguje absolutně} \Leftrightarrow l \geq k+2.$$

`Návod:` 1. Q má nejvýše l kořenů. Zbylé úlohy se řeší podobně jako ve cvičení 1.

Cvičení 3: Nechť n_0 je jako ve Cvičení 2.

1. *Ukažte, že řada $\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n\frac{P(n)}{Q(n)}$ konverguje absolutně, právě když $l \geq k+2$.*

2. *Ukažte, že řada $\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n\frac{P(n)}{Q(n)}$ konverguje, právě když $l > k$.*

`Návod:` 1. Použijte bod 3 ze cvičení 2.

2. Pro implikaci $\Rightarrow$ použijte bod 2 ze cvičení 2. Pro implikaci $\Leftarrow$ použijte Leibnizovo kritérium. Nejprve ukažte, že existuje n_1, že buď pro každé $n \geq n_1$ je $\frac{P(n)}{Q(n)} > 0$ nebo pro každé $n \geq n_1$ je $\frac{P(n)}{Q(n)} < 0$. Dále použije bod 2 ze cvičení 2. Pro ověření monotonie spočtěte derivaci funkce $\frac{P}{Q}$ a ukažte, že existuje okolí $+\infty$, že na něm je tato derivace buď všude kladná nebo všude záporná.

Cvičení 4: Ukažte, že řada $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$.

`Návod:` Pro $x \neq 0$ použijte podílové kritérium.

Cvičení 5: Pro $x \in \mathbb{R}$ definujme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Dle cvičení 4 víme, že f je funkce definovaná na $\mathbb{R}$.

Ukažte, že pro $x, y \in \mathbb{R}$ platí $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$.

`Návod:` Výraz $f(x+y)$ upravte pomocí binomické věty a použijte Cauchyův součin řad.

Cvičení 6: Nechť $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ je řada splňující předpoklady Leibnizova kritéria.

Označme $\{s_m\}$ posloupnost částečných součtů a s součet řady (víme, že existuje podle Leibnizova kritéria).

Ukažte, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $|s_m - s| \leq a_{m+1}$.

`Návod:` Projděte si důkaz Leibnizova kritéria a ukažte, že vlastně dává nerovnosti

$$s_{2m-1} \leq s \leq s_{2m} \quad \text{a} \quad s_{2m} \geq s \geq s_{2m+1}.$$