

XVII.1 Soustavy diferenciálních rovnic – základy

- **Soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu** rozumíme soustavu tvaru

$$(1) \quad \begin{aligned} x'_1(t) &= f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ x'_2(t) &= f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ &\vdots \\ x'_n(t) &= f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \end{aligned}$$

kde f_1, \dots, f_n jsou dané funkce definované na jisté neprázdné otevřené podmnožině $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.

- **Vektorovou funkcí** rozumíme zobrazení definované na podmnožině \mathbf{R} s hodnotami v \mathbf{R}^n ($n \in \mathbf{N}$). Je-li \mathbf{x} vektorová funkce do \mathbf{R}^n , má n složek a lze psát $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$, kde x_1, \dots, x_n jsou reálné funkce jedné proměnné.
- **Derivování a integrování vektorových funkcí.** Je-li $\mathbf{x} : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}^n$, potom

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= [x'_1(t), \dots, x'_n(t)], \quad t \in (\alpha, \beta); \\ \int_a^b \mathbf{x}(s) \, ds &= \left[\int_a^b x_1(s) \, ds, \dots, \int_a^b x_n(s) \, ds \right], \quad a, b \in (\alpha, \beta), \end{aligned}$$

pokud derivace, resp. integrály, jednotlivých složek existují.

- Je-li vektorové zobrazení \mathbf{f} definované na podmnožině \mathbf{R}^m s hodnotami v \mathbf{R}^n , lze opět psát $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_n]$, kde f_1, \dots, f_n jsou funkce definované na podmnožině \mathbf{R}^m – složky zobrazení \mathbf{f} . Nechť $G \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina a \mathbf{f} je zobrazení G do \mathbf{R}^n . Řekneme, že \mathbf{f} je třídy \mathcal{C}^1 na G , jestliže $f_i \in \mathcal{C}^1(G)$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. Značíme $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(G, \mathbf{R}^n)$.

- **Vektorový tvar soustavy (1):**

$$(2) \quad \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)),$$

kde máme $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$,
 $\mathbf{x}'(t) = [x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t)]$ a dále $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]$.

- **Řešením** soustavy (2) rozumíme vektorovou funkci \mathbf{x} definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $J \subset \mathbf{R}$ s hodnotami v \mathbf{R}^n takovou, že pro každé $t \in J$ existuje vlastní derivace $\mathbf{x}'(t)$ a platí rovnost (2).
- **Maximální řešení** soustavy (2) je takové řešení \mathbf{x} definované na intervalu J , které již nelze prodloužit, tj. je-li \mathbf{y} řešení definované na intervalu I , $J \subset I$ a $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t)$ pro každé $t \in J$, pak $J = I$.
- **Počáteční úlohou** pro (2) rozumíme úlohu, kdy hledáme řešení \mathbf{x} soustavy (2) splňující navíc předem zadanou podmínku $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$, kde $[t_0, \mathbf{x}^0] \in G$ (tzv. počáteční podmínka).

Větička 1 (ekvivalence diferenciální a integrální rovnice). *Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbf{R}^n$ spojité vektorové zobrazení (tj. f_1, \dots, f_n jsou spojité funkce). Nechť $(\alpha, \beta) \subset \mathbf{R}$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $[t_0, \mathbf{x}^0] \in G$. Vektorová funkce $\mathbf{x} : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}^n$ je řešením rovnice (2) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$, právě když pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ splňuje vztah*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds.$$

Věta 2 (Peanova o existenci řešení). *Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená neprázdna množina, $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbf{R}^n$ je spojitá (tj. f_1, \dots, f_n jsou spojité funkce). Pak pro každý bod $[t_0, \mathbf{x}_0] \in G$ existuje maximální řešení rovnice (2) splňující $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.*

Věta 3 (o existenci a jednoznačnosti řešení). *Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená neprázdna množina, $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbf{R}^n$ splňuje podmínku:*

- (3) *Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí, že f_i je spojitá na G a její parciální derivace podle druhé, třetí, ..., $(n+1)$ -té proměnné jsou spojité na G .*

Jestliže $[t_0, \mathbf{x}^0] \in G$, potom existuje právě jedno maximální řešení rovnice (2) splňující $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$.