XV. Lineární rovnice prvního řádu

- **Lineární diferenciální rovnice prvního řádu** je rovnice tvaru

$$y' + p(x)y = q(x),$$

kde p a q jsou funkce spojité na daném intervalu (a, b). Je-li funkce q nulová, mluvíme o **homogenní rovnici**.

- Zobrazení

$$L\colon y \mapsto y' + p(x)y$$

je lineární zobrazení prostoru $\mathcal{C}^1(a, b)$ do prostoru $\mathcal{C}(a, b)$. Řešení lze tedy rozdělit na řešení homogenní rovnice a hledání partikulárního řešení a použít Větu IX.6.

- Homogenní rovnice je rovnicí se separovanými proměnnými. Množina všech řešení má tvar

$$\{cy_h \colon c \in \mathbf{R}\},$$

kde $y_h \in \mathcal{C}^1(a, b)$ je nějaká funkce nenabývající hodnoty 0. Je to tedy vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^1(a, b)$ dimenze 1.

- **Variace konstanty.** Partikulární řešení lze hledat a najít ve tvaru

$$y(x) = c(x)y_h(x),$$

kde y_h je nějaké nenulové řešení homogenní rovnice (tj. $\{y_h\}$ je báze prostoru řešení homogenní rovnice).

- **Metoda integračního faktoru.** Rovnici lze přímo řešit tak, že ji vynásobíme funkcí $e^{P(x)}$, kde P je primitivní funkce k p, a pak levou stranu vyjádříme jako derivaci součinu.
- **Existence a jednoznačnost řešení.** Pro každé $x_0 \in (a, b)$ a každé $y_0 \in \mathbf{R}$ existuje právě jedno maximální řešení y, které splňuje $y(x_0) = y_0$. Navíc je y definováno na celém (a, b).