

## XVII.5 Stabilita stacionárních řešení autonomních soustav

Uvažujme soustavu

$$(*) \quad \mathbf{x}'(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)),$$

kde  $\mathbf{g}$  je zobrazení třídy  $\mathcal{C}^1$  definované na otevřené množině  $G \subset \mathbf{R}^n$  s hodnotami v  $\mathbf{R}^n$ .

**Definice.** Řekneme, že  $\mathbf{a} \in G$  je **stacionární bod rovnice** (\*), jestliže  $\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \mathbf{o}$ .

**Definice.** Řekneme, že stacionární bod  $\mathbf{a} \in G$  rovnice (\*) je

- (i) **stabilní**, jestliže pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro každé maximální řešení  $\mathbf{x}$  rovnice (\*) splňující  $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{a}\| < \delta$  platí:
  - $\mathbf{x}$  je definováno na otevřeném intervalu obsahujícím interval  $\langle 0, +\infty \rangle$ ;
  - $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{a}\| < \varepsilon$  pro všechna  $t \in \langle 0, +\infty \rangle$ ;
- (ii) **nestabilní**, jestliže není stabilní;
- (iii) **asymptoticky stabilní**, jestliže je stabilní a existuje  $\Delta > 0$  takové, že pro každé maximální řešení  $\mathbf{x}$  rovnice (\*) splňující  $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{a}\| < \Delta$  platí  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{a}$ .

**Věta 14.** *Nechť  $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ .*

- (i) *Stacionární bod  $\mathbf{o}$  rovnice  $\mathbf{x}' = \mathbb{A}\mathbf{x}$  je asymptoticky stabilní, právě když  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  pro každé vlastní číslo  $\lambda$  matice  $\mathbb{A}$ .*
- (ii) *Stacionární bod  $\mathbf{o}$  rovnice  $\mathbf{x}' = \mathbb{A}\mathbf{x}$  je stabilní, právě když pro každé vlastní číslo  $\lambda$  matice  $\mathbb{A}$  platí buď  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ , nebo  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  a násobnost vlastního čísla  $\lambda$  je rovna  $n - h(\lambda \mathbb{I} - \mathbb{A})$ .*

**Věta 15** (Ljapunovova věta). *Nechť  $\mathbf{a}$  je stacionární bod rovnice (\*). Označme*

$$\mathbb{A} = \left( \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \right)_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}.$$

*Pak platí:*

- (i) *Jestliže pro každé vlastní číslo  $\lambda$  matice  $\mathbb{A}$  platí  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  (tj. je-li  $\mathbf{o}$  asymptoticky stabilní pro  $\mathbf{x}' = \mathbb{A}\mathbf{x}$ ), pak  $\mathbf{a}$  je asymptoticky stabilní stacionární bod rovnice (\*).*
- (ii) *Jestliže alespoň jedno vlastní číslo matice  $\mathbb{A}$  má kladnou reálnou část, pak je  $\mathbf{a}$  nestabilní stacionární bod rovnice (\*).*