

XII. Diferenční rovnice

Definice. Necht $k \in \mathbf{N}$.

(i) **Lineární diferenční rovnicí k -tého řádu s konstantními koeficienty** budeme rozumět rovnici

$$(*) \quad y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = a_n, \quad n \in \mathbf{N},$$

kde neznámou je posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$, přičemž $p_1, \dots, p_k \in \mathbf{R}$, $p_k \neq 0$, a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel.

(ii) **Řešením rovnice (*)** rozumíme každou posloupnost reálných čísel $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$ splňující (*) pro každé $n \in \mathbf{N}$.

(iii) Pokud chceme, aby řešení rovnice (*) splňovalo podmínky

$$(**) \quad y(1) = y_1, \dots, y(k) = y_k,$$

kde $y_1, \dots, y_k \in \mathbf{R}$ jsou dána (tzv. **počáteční podmínky**), pak hovoříme o **počáteční úloze**. **Řešením počáteční úlohy (*), (**)** rozumíme každou posloupnost reálných čísel $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$, která splňuje rovnosti (***) a také splňuje (*) pro každé $n \in \mathbf{N}$.

(iv) Pokud $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbf{N}$, pak (*) má tvar

$$(***) \quad y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = 0, \quad n \in \mathbf{N},$$

kterážto rovnice se nazývá **homogenní**.

Poznámka. Je možné uvedené rovnice zkoumat i v komplexním oboru. Definice jsou analogické, jen místo reálných čísel se uvažují čísla komplexní, neznámou je pak posloupnost komplexních čísel. Zřejmé analogie Větičky 1 a Vět 2 a 3 platí i v komplexním oboru (se stejným důkazem). Své analogie mají i Věty 4 a 5, ty jsou v komplexním oboru jednodušší.

Větička 1. *Počáteční úloha (*), (**) má právě jedno řešení.*

Pozorování. Necht $k \in \mathbf{N}$, $p_1, \dots, p_k \in \mathbf{R}$. Pak zobrazení $L : \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{s}$ definované předpisem

$$L(\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}) = \{y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n)\}_{n=1}^{\infty}$$

je lineární.

Věta 2. *Množina řešení homogenní rovnice (***) tvoří vektorový podprostor dimenze k prostoru \mathfrak{s} .*

Definice. Bázi prostoru řešení rovnice (***) se říká **fundamentální systém** řešení rovnice (***)

Věta 3. Necht posloupnosti $\{y^1(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y^2(n)\}_{n=1}^{\infty}$, \dots , $\{y^k(n)\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří fundamentální systém řešení (***) . Necht posloupnost $\{z(n)\}_{n=1}^{\infty}$ řeší (*). Potom posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$ řeší (*) právě když existují konstanty $c_1, \dots, c_k \in \mathbf{R}$ takové, že

$$y(n) = z(n) + c_1 y^1(n) + \dots + c_k y^k(n)$$

pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Definice. Charakteristickým polynomem rovnice (*) budeme rozumět polynom $\chi(\lambda) = \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \dots + p_{k-1} \lambda + p_k$.

Věta 4. Necht $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ jsou všechny navzájem různé reálné kořeny charakteristického polynomu rovnice (*) s násobnostmi r_1, \dots, r_s . Necht ξ_1, \dots, ξ_l jsou všechny navzájem různé komplexní kořeny tohoto polynomu s kladnou imaginární částí a násobnostmi q_1, \dots, q_l , přičemž pro $j = 1, \dots, l$ platí $\xi_j = \mu_j(\cos \nu_j + i \sin \nu_j)$. Pak následující posloupnosti tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice (***) .

$$\begin{array}{cccc} \{\lambda_1^n\}, & \{n\lambda_1^n\}, & \dots & \{n^{r_1-1}\lambda_1^n\}, \\ \vdots & & & \\ \{\lambda_s^n\}, & \{n\lambda_s^n\}, & \dots & \{n^{r_s-1}\lambda_s^n\}, \\ \{\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, & \dots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, \\ \{\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, & \dots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, \\ \vdots & & & \\ \{\mu_l^n \cos \nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \cos \nu_l n\}, & \dots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \cos \nu_l n\}, \\ \{\mu_l^n \sin \nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \sin \nu_l n\}, & \dots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \sin \nu_l n\} \end{array}$$

Věta 5. Necht posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v rovnici (*) splňuje

$$a_n = \alpha^n (P(n) \cos(\nu n) + Q(n) \sin(\nu n)),$$

kde $\alpha > 0$, $\nu \in \mathbf{R}$ a P, Q jsou polynomy. Pak existuje řešení (*) ve tvaru

$$y(n) = \alpha^n n^m (R(n) \cos(\nu n) + S(n) \sin(\nu n)),$$

kde R, S jsou vhodné polynomy stupně ne většího než je větší ze stupňů polynomů P, Q a $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ udává jakou násobnost má číslo $\alpha(\cos \nu + i \sin \nu)$ jakožto kořen charakteristického polynomu rovnice (*) ($m = 0$, pokud toto číslo kořenem není).

Poznámka. Pokud $a_n = \alpha^n P(n)$, tj. pokud $\nu = 0$, existuje řešení ve tvaru $y(n) = \alpha^n n^m R(n)$.