

VIII.3 Primitivní funkce – úvod

Připomenutí: (1) Funkce F je **primitivní funkcí** k f na otevřeném intervalu I , jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

(2) Je-li f spojitá na otevřeném intervalu I , pak existuje primitivní funkce k f na I (Věta 8).

Věta 10. *Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I . Pak existuje $c \in \mathbf{R}$ tak, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.*

Poznámka. Množinu všech primitivních funkcí k f na I značíme symbolem $\int f(x) dx$. Skutečnost, že F je primitivní funkcí k f na I zapisujeme

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} F(x), \quad x \in I.$$

Větička 11. *Platí:*

- (1) $\int x^n dx \stackrel{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ na \mathbf{R} (pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$);
- (2) $\int x^\alpha dx \stackrel{c}{=} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ na $(0, +\infty)$ (pro $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, pro $\alpha \in \mathbf{Z}$, $\alpha < -1$ také na $(-\infty, 0)$);
- (3) $\int \frac{1}{x} dx \stackrel{c}{=} \log x$ na $(0, +\infty)$, $\int \frac{1}{x} dx = \log(-x)$ na $(-\infty, 0)$;
- (4) $\int \exp x dx \stackrel{c}{=} \exp x$ na \mathbf{R} ;
- (5) $\int \sin x dx \stackrel{c}{=} -\cos x$ na \mathbf{R} , $\int \cos x dx \stackrel{c}{=} \sin x$ na \mathbf{R} ;
- (6) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx \stackrel{c}{=} \operatorname{tg} x$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$;
- (7) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx \stackrel{c}{=} -\operatorname{cotg} x$ na každém z intervalů $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$;
- (8) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{c}{=} \arcsin x$ na $(-1, 1)$;
- (9) $\int \frac{1}{1+x^2} dx \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg} x$ na \mathbf{R} .

Větička 12. *Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F , funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I .*

Poznámka. Tvrzení předchozí větičky často zapisujeme

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

Věta 13 (o substituci). (i) Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) . Nechť φ je funkce definovaná na (α, β) s hodnotami v intervalu (a, b) , která má v každém bodě $t \in (\alpha, \beta)$ vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} F(\varphi(t)) \text{ na } (\alpha, \beta).$$

(ii) Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α, β) nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} G(t) \text{ na } (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)) \text{ na } (a, b).$$

Poznámka. Bod (ii) předchozí věty platí i za poněkud jiných předpokladů: Nechť funkce f má primitivní funkci na (a, b) (což je splněno například, je-li f spojitá na (a, b)), funkce φ má vlastní derivaci v každém bodě intervalu (α, β) , je prostá na (α, β) a zobrazuje tento interval na interval (a, b) . Pak, platí-li první rovnost, platí i druhá.

Věta 14 (integrace per partes). Nechť I je otevřený interval a funkce f a g jsou spojité na I . Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I . Pak platí

$$\int g(x)F(x) dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x) dx \text{ na } I.$$