

V.8 Konkávní funkce

Definice. Necht $M \subset \mathbf{R}^n$. Řekneme, že M je **konvexní** množina, jestliže platí:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \in M.$$

Věta 20 (o střední hodnotě). Necht $G \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní otevřená množina, $f \in C^1(G)$, $\mathbf{a} \in G, \mathbf{b} \in G$. Pak existuje $t_0 \in (0, 1)$ tak, že

$$f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(t_0\mathbf{a} + (1-t_0)\mathbf{b})(a_i - b_i).$$

Definice. Necht $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní množina a funkce f je definována na M . Řekneme, že f je

- **konkávní** funkce na M , jestliže

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in M \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : f(t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b}) \geq tf(\mathbf{a}) + (1-t)f(\mathbf{b}),$$

- **ryze konkávní** funkce na M , jestliže

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in M, \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \forall t \in (0, 1) : f(t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b}) > tf(\mathbf{a}) + (1-t)f(\mathbf{b}).$$

Poznámky. (1) Analogicky se definují **konvexní** a **ryze konvexní** funkce. Funkce f je konvexní (ryze konvexní), právě když $-f$ je konkávní (ryze konkávní). Následující věty jsou formulovány pro konkávní a ryze konkávní funkce, jejich zřejmé analogie platí pro konvexní a ryze konvexní funkce.

(2) f je (ryze) konkávní na konvexní množině M , právě když je (ryze) konkávní na každé úsečce obsažené v M . To je ekvivalentní tomu, že pro každé dva body $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M, \mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, je funkce $t \mapsto f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))$ (ryze) konkávní na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Věta 21. *Nechť funkce f je konkávní na otevřené konvexní množině G . Pak f je spojitá na G .*

Poznámky. (1) Není-li G otevřená, f nemusí být spojitá na G (nemusí být spojitá v hraničních bodech G vzhledem ke G).

(2) Pro případ $n = 1$ je Věta 21 snadná. Je-li f konkávní na otevřeném intervalu (a, b) , pak má v každém bodě intervalu (a, b) vlastní jednostranné derivace (to snadno plyne z Větičky IV.37 a Věty IV.9), a je tedy spojitá na (a, b) . Pro obecné n je důkaz mírně složitější.

Věta 22. *Nechť funkce f je konkávní na konvexní množině M . Pak pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$ je množina $Q_\alpha = \{\mathbf{x} \in M; f(\mathbf{x}) \geq \alpha\}$ konvexní.*

Věta 23 (charakterizace konkávních funkcí třídy C^1). *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní otevřená množina a $f \in C^1(G)$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.*

- (a) *Funkce f je konkávní na G .*
- (b) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in G : f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})(y_i - x_i).$
- (c) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in G : \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{y}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right) (y_i - x_i) \leq 0.$

Důsledek. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní otevřená množina, $f \in C^1(G)$ je konkávní funkce a $\mathbf{x} \in G$. Jestliže v bodě \mathbf{x} jsou všechny parciální derivace prvního řádu funkce f nulové, pak f nabývá v \mathbf{x} maxima na G .*

Věta 24 (charakterizace ryze konkávních funkcí třídy C^1). *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní otevřená množina a $f \in C^1(G)$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.*

- (a) *Funkce f je ryze konkávní na G .*
- (b) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in G, \mathbf{x} \neq \mathbf{y} : f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) < \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})(y_i - x_i).$
- (c) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in G, \mathbf{x} \neq \mathbf{y} : \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{y}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right) (y_i - x_i) < 0.$