

## VI.2 Regulární matice a hodnost matice

**Definice.** Řekneme, že matice  $\mathbb{A} \in M(n \times n)$  je **regulární**, pokud existuje matice  $\mathbb{B} \in M(n \times n)$  taková, že  $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$ .

**Definice.** Řekneme, že matice  $\mathbb{B} \in M(n \times n)$  je **inverzní maticí** k matici  $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ , jestliže  $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$ .

**Poznámky.**

- (i) Matice  $\mathbb{A} \in M(n \times n)$  je regulární, právě když k ní existuje inverzní matice.
- (ii) Nechť  $\mathbb{A} \in M(n \times n)$  je regulární matice. Pak existuje právě jedna matice k ní inverzní. Značíme ji  $\mathbb{A}^{-1}$ .
- (iii) Jsou-li  $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(n \times n)$  takové, že  $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}$ , pak  $\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$ .

**Věta 4.** Nechť  $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(n \times n)$  jsou regulární matice. Pak platí:

- (a)  $\mathbb{A}^{-1}$  je regulární matice a  $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$ .
- (b)  $\mathbb{A}^T$  je regulární matice a  $(\mathbb{A}^T)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^T$ .
- (c)  $\mathbb{A}\mathbb{B}$  je regulární matice a  $(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$ .

**Definice.** Nechť  $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m \in M(1 \times n)$  jsou řádkové vektory.

- **Lineární kombinací** vektorů  $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m$  budeme rozumět výraz tvaru  $\lambda_1 \mathbf{v}^1 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}^m$ , kde  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  jsou reálná čísla.
- **Triviální lineární kombinací** vektorů  $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m$  rozumíme lineární kombinaci  $0 \cdot \mathbf{v}^1 + \dots + 0 \cdot \mathbf{v}^m$ . Lineární kombinaci, která není triviální, nazýváme **netriviální**.
- Řekneme, že vektory  $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m$  jsou **lineárně závislé**, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru.
- Řekneme, že vektory  $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m$  jsou **lineárně nezávislé**, nejsou-li lineárně závislé, tj. pokud platí: kdykoli  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  jsou reálná čísla taková, že  $\lambda_1 \mathbf{v}^1 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}^m = \mathbf{o}$ , pak  $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ .

**Definice.** Nechť  $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ . **Hodností** matice  $\mathbb{A}$  rozumíme maximální počet jejích lineárně nezávislých řádků. Hodnost matice  $\mathbb{A}$  značíme  $h(\mathbb{A})$ .

**Definice.** Řekneme, že matice  $\mathbb{A} \in M(m \times n)$  je **schodovitá**, jestliže pro každé  $i \in \{2, \dots, m\}$  její  $i$ -tý řádek je buď nulový nebo začíná větším počtem nul než  $(i - 1)$ -ní řádek.

*Poznámka.* Hodnost schodovité matice je rovna počtu jejích nenulových řádků.

**Definice.** Elementárními řádkovými úpravami matice  $\mathbb{A}$  rozumíme:

- (1) přehození dvou řádků matice  $\mathbb{A}$  (e.ř.ú. prvního druhu);
- (2) vynásobení jednoho řádku matice  $\mathbb{A}$  nenulovým číslem (e.ř.ú. druhého druhu);
- (3) přičtení násobku jednoho řádku matice  $\mathbb{A}$  k jinému řádku (e.ř.ú. třetího druhu).

**Transformací** rozumíme konečnou posloupnost elementárních řádkových úprav.

**Věta 5** (vlastnosti transformace).

- (i) Každou matici lze vhodnou transformací převést na schodovitou matici.
- (ii) Je-li  $T_1$  transformace použitelná na matice o  $m$  řádcích, pak existuje transformace  $T_2$  použitelná na matice o  $m$  řádcích taková, že pro každé dvě matice  $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n)$  platí, že  $\mathbb{B}$  vznikne z  $\mathbb{A}$  aplikací transformace  $T_1$ , právě když  $\mathbb{A}$  vznikne z  $\mathbb{B}$  aplikací transformace  $T_2$ .
- (iii) Jestliže lze matici  $\mathbb{A}$  převést nějakou transformací na matici  $\mathbb{B}$ , pak  $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{B})$ .

*Poznámka.* Analogicky jako řádkové úpravy a transformaci lze definovat **sloupcové úpravy** a **sloupcovou transformaci**. Je snadné dokázat, že sloupcová transformace nemění hodnost matice. Odtud plyne, že pro každou matici  $\mathbb{A}$  platí  $h(\mathbb{A}^T) = h(\mathbb{A})$ .

**Věta 6** (transformace a součin). Nechť  $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ ,  $\mathbb{B} \in M(n \times k)$ ,  $\mathbb{C} \in M(m \times k)$  splňují  $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{C}$ . Nechť matice  $\mathbb{A}'$  vznikne z matice  $\mathbb{A}$  aplikací transformace  $T$  a matice  $\mathbb{C}'$  vznikne z matice  $\mathbb{C}$  aplikací téže transformace  $T$ . Pak  $\mathbb{A}'\mathbb{B} = \mathbb{C}'$ .

**Metoda hledání inverzní matice.** Nechť  $\mathbb{A} \in M(n \times n)$  je regulární. Pak existuje transformace  $T$ , která  $\mathbb{A}$  převede na jednotkovou matici. Aplikujeme-li tuto transformaci  $T$  na  $\mathbb{I}$ , dostaneme  $\mathbb{A}^{-1}$ .

**Věta 7.** Nechť  $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ . Pak  $\mathbb{A}$  je regulární, právě když  $h(\mathbb{A}) = n$ .