

V.1 \mathbf{R}^n jako metrický a lineární prostor

Definice.

- Prostorem \mathbf{R}^n rozumíme množinu všech uspořádaných n -tic reálných čísel, tj. $\mathbf{R}^n = \underbrace{\mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}}_{n\text{-krát}}$, neboli

$$\mathbf{R}^n = \{[x_1, \dots, x_n] : x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}\}.$$

- Pro $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbf{R}^n$ a $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n] \in \mathbf{R}^n$ značíme $\mathbf{x} + \mathbf{y} = [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n]$.
- Pro $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbf{R}^n$ a $\alpha \in \mathbf{R}$ značíme $\alpha\mathbf{x} = [\alpha x_1, \dots, \alpha x_n]$.
- Značíme $\mathbf{o} = \mathbf{0} = [0, \dots, 0] \in \mathbf{R}^n$. Tento bod nazýváme **počátkem**.
- Pro $i \in \{1, \dots, n\}$ značíme $\mathbf{e}^i = [0, \dots, 0, \underset{i\text{-tá souřadnice}}{1}, 0, \dots, 0]$.
- **Vzdáleností** bodů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ rozumíme číslo

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2}.$$

Tímto předpisem definovanou funkci $\rho : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ nazýváme **euklidovskou metrikou**.

Věta 1 (vlastnosti euklidovské metriky).

- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n : \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$;
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n : \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (**symetrie**);
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n : \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (**trojúhelníková nerovnost**);
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \forall \lambda \in \mathbf{R} : \rho(\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = |\lambda|\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (**homogenita**);
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n : \rho(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (**translační invariance**).

Definice.

- Nechť $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $r > 0$. Množinu $B(\mathbf{x}, r)$ definovanou předpisem

$$B(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n; \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r\}$$

nazýváme **otevřenou koulí o poloměru r a středu \mathbf{x}** nebo také **okolím bodu \mathbf{x} (o poloměru r)**.

- Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Řekneme, že bod \mathbf{x} je **vnitřním bodem množiny M** , jestliže existuje $r > 0$ tak, že $B(\mathbf{x}, r) \subset M$.
- Množina $M \subset \mathbf{R}^n$ se nazývá **otevřená v \mathbf{R}^n** , jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.
- **Vnitřkem množiny $M \subset \mathbf{R}^n$** rozumíme množinu všech jejích vnitřních bodů. Vnitřek množiny M značíme $\text{Int } M$.

Poznámka. $\text{Int } M$ je největší otevřená množina obsažená v M . Množina M je otevřená, právě když $M = \text{Int } M$.

Věta 2 (vlastnosti otevřených množin).

- (i) Prázdná množina a celý prostor \mathbf{R}^n jsou otevřené v \mathbf{R}^n .
- (ii) Necht množiny $G_\alpha \subset \mathbf{R}^n$, $\alpha \in A$, jsou otevřené v \mathbf{R}^n . Pak $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ je otevřená množina v \mathbf{R}^n .
- (iii) Necht množiny G_i , $i = 1, \dots, m$, jsou otevřené. Pak $\bigcap_{i=1}^m G_i$ je otevřená množina v \mathbf{R}^n .

Poznámka. Bod (ii) se stručně formuluje takto: *Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina.* Bod (iii) se stručně formuluje: *Průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina.* Průnik nekonečně mnoha otevřených množin nemusí být otevřená množina.

Definice. Necht $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ a $\mathbf{x}^j \in \mathbf{R}^n$ pro každé $j \in \mathbf{N}$. Řekneme, že posloupnost $\{\mathbf{x}^j\}$ konverguje k bodu \mathbf{x} (píšeme $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{x}^j = \mathbf{x}$ nebo též $\mathbf{x}^j \rightarrow \mathbf{x}$), pokud $\lim_{j \rightarrow \infty} \rho(\mathbf{x}^j, \mathbf{x}) = 0$.

Poznámka. $\mathbf{x}^j \rightarrow \mathbf{x} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists j_0 \in \mathbf{N} \forall j \in \mathbf{N}, j \geq j_0: \mathbf{x}^j \in B(\mathbf{x}, \varepsilon)$.

Věta 3. Necht $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ a $\mathbf{x}^j \in \mathbf{R}^n$ pro každé $j \in \mathbf{N}$. Pak $\mathbf{x}^j \rightarrow \mathbf{x}$, právě když $\lim_{j \rightarrow \infty} x_i^j = x_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$.

Definice. Necht $M \subset \mathbf{R}^n$.

- Bod $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ nazveme **hraničním bodem množiny** M , pokud pro každé $r > 0$ platí $B(\mathbf{x}, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(\mathbf{x}, r) \cap (\mathbf{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$.
- **Hranicí množiny** M rozumíme množinu všech hraničních bodů M . Značíme ji $H(M)$.
- **Uzávěrem** množiny M rozumíme množinu $M \cup H(M)$ (značíme \overline{M}).
- Řekneme, že množina M je **uzavřená**, pokud obsahuje všechny své hraniční body (tj. $H(M) \subset M$, neboli $\overline{M} = M$).

Poznámka. \overline{M} je nejmenší uzavřená množina obsahující M .

Věta 4. Necht $M \subset \mathbf{R}^n$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (1) M je uzavřená.
- (2) $\mathbf{R}^n \setminus M$ je otevřená.
- (3) Každý bod $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, k němuž konverguje nějaká posloupnost $\{\mathbf{x}^j\}$ prvků množiny M , patří do množiny M .

Věta 5 (vlastnosti uzavřených množin).

- (i) Prázdná množina a celý prostor \mathbf{R}^n jsou uzavřené v \mathbf{R}^n .
- (ii) Necht množiny $F_\alpha \subset \mathbf{R}^n$, $\alpha \in A$, jsou uzavřené v \mathbf{R}^n . Pak $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ je uzavřená množina v \mathbf{R}^n .
- (iii) Necht množiny F_i , $i = 1, \dots, m$, jsou uzavřené. Pak $\bigcup_{i=1}^m F_i$ je uzavřená množina v \mathbf{R}^n .