IV.1 Spojitost a limity funkcí reálné proměnné
Definice a základní vlastnosti

Reálnou funkcí reálné proměnné (krátce **funkcí**) rozumíme zobrazení $f\colon M \to \mathbf{R}$, kde $M \subset \mathbf{R}$.
Funkce f je na množině M **rostoucí**, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$.
Analogicky se definuje funkce **klesající**, **neklesající** a **nerostoucí**.
Funkce f je na množině M **monotónní**, je-li neklesající nebo nerostoucí; f je **ryze monotónní**, je-li rostoucí nebo klesající.
Funkce f je **omezená** na množině M, je-li množina $f(M)$ omezená. Analogicky se definuje funkce **shora omezená** a **zdola omezená** na množině M.

Nechť f je funkce a $a \in \mathbf{R}$. Řekneme, že funkce f je

- **spojitá v bodě** a, jestliže platí:
$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\, \forall x \in B(a,\delta)\colon f(x) \in B(f(a),\varepsilon);$$
- **spojitá v bodě** a **zleva**, jestliže platí:
$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\, \forall x \in (a-\delta, a\rangle\colon f(x) \in B(f(a),\varepsilon);$$
- **spojitá v bodě** a **zprava**, jestliže platí:
$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\, \forall x \in \langle a, a+\delta)\colon f(x) \in B(f(a),\varepsilon).$$

Značení.

- Pro $a \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$ položme $B^+(a,\varepsilon) = \langle a, a+\varepsilon)$ a $B^-(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a\rangle$. Množinu $B^+(a,\varepsilon)$ nazýváme **pravým** ε**-ovým okolím bodu** a, množinu $B^-(a,\varepsilon)$ nazýváme **levým** ε**-ovým okolím bodu** a.
- Pro $a \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$ položme $P(a,\varepsilon) = B(a,\varepsilon) \setminus \{a\}$. Tuto množinu nazýváme ε**-ovým prstencovým okolím bodu** a.
- Pro $a \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$ položme $P^+(a,\varepsilon) = (a, a+\varepsilon)$ a $P^-(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a)$. Množinu $P^+(a,\varepsilon)$ nazýváme **pravým** ε**-ovým prstencovým okolím bodu** a, množinu $P^-(a,\varepsilon)$ nazýváme **levým** ε**-ovým prstencovým okolím bodu** a.
- Pro $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$ definujeme
$$B(+\infty,\varepsilon) = (\tfrac{1}{\varepsilon}, +\infty) \text{ a } B(-\infty,\varepsilon) = (-\infty, -\tfrac{1}{\varepsilon}).$$
Dále značíme $P(+\infty,\varepsilon) = P_-(+\infty,\varepsilon) = B_-(+\infty,\varepsilon) = B(+\infty,\varepsilon)$
a $P(-\infty,\varepsilon) = P_+(-\infty,\varepsilon) = B_+(-\infty,\varepsilon) = B(-\infty,\varepsilon)$.

Nechť f je funkce, $a, A \in \mathbf{R}^*$. Řekneme, že funkce f **má limitu v bodě** a **rovnou** A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\, \forall x \in P(a,\delta)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Tuto skutečnost zapisujeme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Nechť navíc $a \in \mathbf{R}$. Řekneme, že funkce f

- **má limitu v bodě a zprava rovnou A**, jestliže platí
$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\, \forall x \in P^{+}(a, \delta)\colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$
Tuto skutečnost zapisujeme $\lim_{x \to a+} f(x) = A$.
- **má limitu v bodě a zleva rovnou A**, jestliže platí
$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\, \forall x \in P^{-}(a, \delta)\colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$
Tuto skutečnost zapisujeme $\lim_{x \to a-} f(x) = A$.

Poznámka. Limitou zleva v $+\infty$ rozumíme limitu v $+\infty$; limitou zprava v $-\infty$ rozumíme limitu v $-\infty$.
Jestliže je limitou funkce f v bodě a reálné číslo, říkáme, že f má v bodě a **vlastní limitu**. Je-li limitou funkce f v bodě a $+\infty$ nebo $-\infty$, říkáme, že f má v bodě a **nevlastní limitu**. Podobně pro limity zleva a zprava.

Poznámka. Je-li funkce f v bodě $a \in \mathbf{R}$ spojitá, je definovaná alespoň na nějakém okolí bodu a, tj. na množině $B(a, \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$. Má-li funkce f v bodě $a \in \mathbf{R}^*$ limitu, je definovaná alespoň na nějakém prstencovém okolí bodu a, tj. na množině $P(a, \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$. Podobně pro spojitost a limity zprava a zleva.

Větička 1. *Nechť f je funkce a $a \in \mathbf{R}$.*

(1) *Funkce f je spojitá v bodě a, právě když je v bodě a spojitá zleva i spojitá zprava.*
(2) *Nechť $A \in \mathbf{R}^*$. Pak $\lim_{x \to a} f(x) = A$, právě když*
$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = A.$$
(3) *Funkce f je spojitá v bodě a, právě když $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.*
(4) *Funkce f je spojitá v bodě a zprava, právě když $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$.*
(5) *Funkce f je spojitá v bodě a zleva, právě když $\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$.*

Věta 2. *Nechť f je funkce a $a \in \mathbf{R}^*$. Pak f má v bodě a nejvýše jednu limitu.*

Věta 3. *Nechť funkce f má vlastní limitu v bodě $a \in \mathbf{R}^*$. Pak existuje takové $\delta > 0$, že f je na $P(a, \delta)$ omezená.*

Důsledek. *Nechť funkce f je spojitá v bodě $a \in \mathbf{R}$. Pak existuje takové $\delta > 0$, že f je omezená na množině $B(a, \delta)$.*