I.3. Číselné množiny

Racionální čísla

- **Množina přirozených čísel** je

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

- **Množina celých čísel** je

$$\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbf{N}\} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

- **Množina racionálních čísel** je

$$\mathbf{Q} = \{\tfrac{p}{q} : p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}\}.$$

  Přitom $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$, právě když $p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1$.

Reálná čísla

Množina reálných čísel je množina $\mathbf{R}$, na níž jsou definovány operace sčítání a násobení (značíme $+$ a $\cdot$) a relace uspořádání (značíme $\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

I. Vlastnosti sčítání a násobení

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}\colon x + (y + z) = (x + y) + z$;
- $\forall x, y \in \mathbf{R}\colon x + y = y + x$;
- V $\mathbf{R}$ existuje takový prvek (značíme ho 0 a říkáme mu **nulový prvek**), že pro všechna $x \in \mathbf{R}$ platí $x + 0 = x$.
- $\forall x \in \mathbf{R}\, \exists y \in \mathbf{R}\colon x + y = 0$ (takové y je jen jedno, značíme ho $-x$);
- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}\colon x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;
- $\forall x, y \in \mathbf{R}\colon x \cdot y = y \cdot x$;
- V $\mathbf{R}$ existuje nenulový prvek (značíme ho 1 a říkáme mu **jednotkový prvek**) takový, že pro všechna $x \in \mathbf{R}$ je $1 \cdot x = x$;
- $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\, \exists y \in \mathbf{R}\colon x \cdot y = 1$ (takové y je jen jedno, značíme ho x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$);
- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}\colon (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

II. Vlastnosti uspořádání a jeho vztah k operacím

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}\colon (x \leq y \,\&\, y \leq z) \Rightarrow x \leq z$;
- $\forall x, y \in \mathbf{R}\colon (x \leq y \,\&\, y \leq x) \Rightarrow x = y$;
- $\forall x, y \in \mathbf{R}\colon x \leq y \vee y \leq x$;
- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}\colon x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$;
- $\forall x, y \in \mathbf{R}\colon (0 \leq x \,\&\, 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$.

III. Axiom infima

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ je neprázdná a navíc existuje $a \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ platí $x \geq a$. Pak existuje číslo $s \in \mathbf{R}$, které má vlastnosti:

(i) $\forall x \in M\colon x \geq s$;
(ii) $\forall s' \in \mathbf{R}, s' > s\, \exists x \in M\colon x < s'$.

Definice. Číslo $a \in \mathbf{R}$ se nazývá **dolní závorou** množiny $M \subset \mathbf{R}$, jestliže pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$. Množina $M \subset \mathbf{R}$ se nazývá **zdola omezená**, jestliže má nějakou dolní závoru. Analogicky se definuje **horní závora** a **shora omezená množina**. Množina se nazývá **omezená**, je-li zároveň shora omezená i zdola omezená.

Poznámky:
(1) Číslo s z axiomu infima je jednoznačně určeno, značí se $\inf M$ a říká se mu **infimum** množiny M.
(2) S použitím nově definovaných pojmů lze axiom infima přeformulovat takto: *Každá neprázdná zdola omezená podmnožina* $\mathbf{R}$ *má infimum.*
(3) Infimum množiny M je její největší dolní závora.
(4) Nejmenší horní závoru množiny M (pokud existuje) nazýváme **supremum** množiny M a značíme $\sup M$.
(5) Uvedené vlastnosti množinu reálných čísel popisují jednoznačně.
(6) Platí $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. Podrobněji:

- 1 je jednotkový prvek $\mathbf{R}$ (sedmá vlastnost z první skupiny), $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$ atd. Takto máme $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$.
- 0 je nulový prvek $\mathbf{R}$ (třetí vlastnost z první skupiny), pro $n \in \mathbf{N}$ je $-n$ opačný prvek k n (dle čtvrté vlastnosti první skupiny). Tak dostaneme $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$.
- Racionální číslo $\frac{p}{q}$ dostateme jako $p \cdot q^{-1}$, kde q^{-1} je inverzní prvek ke q (dle osmé vlastnosti z první skupiny). Takto dostáváme $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

Komplexní čísla

Množinou komplexních čísel rozumíme množinu všech výrazů tvaru $a + bi$, kde $a, b \in \mathbf{R}$. Množinu komplexních čísel značíme $\mathbf{C}$. Na $\mathbf{C}$ jsou definovány operace sčítání a násobení, splňují vlastnosti skupiny I a navíc platí $i^2 = -1$.

Věta 5 (základní věta algebry). *Nechť $n \in \mathbf{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{C}$, $a_n \neq 0$. Pak rovnice $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ má alespoň jedno řešení $z \in \mathbf{C}$.*

Důsledky axiomu infima

Věta 6 (o supremu). *Každá neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbf{R}$ má supremum.*

Věta 7 (o existenci celé části). *Pro každé reálné číslo x existuje právě jedno celé číslo k, pro které platí $k \leq x < k + 1$. Toto k nazýváme* **celou částí čísla** *x a značíme $k = [x]$.*

Věta 8 (Archimedova vlastnost). *Pro každé reálné číslo x existuje přirozené číslo n takové, že $n > x$.*

Věta 9 (o existenci n-té odmocniny). *Pro každé $x \in \langle 0, +\infty)$ a každé $n \in \mathbf{N}$ existuje právě jedno $y \in \langle 0, +\infty)$, pro které $y^n = x$.*

Věta 10 (o hustotě $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$). *Pro každá dvě reálná čísla a, b splňující $a < b$ existuje $p \in \mathbf{Q} \cap (a, b)$ a $r \in (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \cap (a, b)$.*