V.1. $\mathbf{R}^n$ jako metrický a lineární prostor

Definice.

- Prostorem $\mathbf{R}^n$ rozumíme množinu všech uspořádaných n-tic reálných čísel, tj. $\mathbf{R}^n = \underbrace{\mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}}_{n\text{-krát}}$, neboli

$$\mathbf{R}^n = \{[x_1, \dots, x_n]\colon x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}\}.$$

- Pro $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbf{R}^n$ a $\boldsymbol{y} = [y_1, \dots, y_n] \in \mathbf{R}^n$ značíme
$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n].$$
- Pro $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbf{R}^n$ a $\alpha \in \mathbf{R}$ značíme $\alpha\boldsymbol{x} = [\alpha x_1, \dots, \alpha x_n]$.
- Značíme $\boldsymbol{o} = \boldsymbol{0} = [0, \dots, 0] \in \mathbf{R}^n$. Tento bod nazýváme **počátkem**.
- Pro $i \in \{1, \dots, n\}$ značíme $\boldsymbol{e}^i = [0, \dots, 0, \underset{i\text{-tá souřadnice}}{1}, 0, \dots, 0]$.
- **Vzdáleností** bodů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ rozumíme číslo $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2}$. Tímto předpisem definovanou funkci $\rho : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \langle 0, +\infty)$ nazýváme **euklidovskou metrikou**.

Věta 1 (vlastnosti euklidovské metriky).

(i) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n : \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$;
(ii) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n : \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ (**symetrie**);
(iii) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^n : \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \le \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ (**trojúhelníková nerovnost**);
(iv) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n\ \forall \lambda \in \mathbf{R} : \rho(\lambda\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{y}) = |\lambda|\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ (**homogenita**);
(v) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^n : \rho(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ (**translační invariance**).

Definice.

- Nechť $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n,\ r > 0$. Množinu $B(\boldsymbol{x}, r)$ definovanou předpisem

$$B(\boldsymbol{x}, r) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n; \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < r\}$$

  nazýváme **otevřenou koulí o poloměru r a středu $\boldsymbol{x}$** nebo také **okolím bodu $\boldsymbol{x}$ (o poloměru r)**
- Nechť $M \subset \mathbf{R}^n,\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$. Řekneme, že bod $\boldsymbol{x}$ je **vnitřním bodem množiny** M, jestliže existuje $r > 0$ tak, že $B(\boldsymbol{x}, r) \subset M$.
- Množina $M \subset \mathbf{R}^n$ se nazývá **otevřená v $\mathbf{R}^n$**, jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.
- **Vnitřkem množiny** $M \subset \mathbf{R}^n$ rozumíme množinu všech jejích vnitřních bodů. Vnitřek množiny M značíme $\operatorname{Int} M$.

Poznámka. $\operatorname{Int} M$ je největší otevřená množina obsažená v M. Množina M je otevřená, právě když $M = \operatorname{Int} M$.

Věta 2 (vlastnosti otevřených množin).

(i) *Prázdná množina a celý prostor* $\mathbf{R}^n$ *jsou otevřené v* $\mathbf{R}^n$.

(ii) *Nechť množiny* $G_\alpha \subset \mathbf{R}^n,\ \alpha \in A$, *jsou otevřené v* $\mathbf{R}^n$. *Pak* $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ *je otevřená množina v* $\mathbf{R}^n$.

(iii) *Nechť množiny* $G_i,\ i = 1, \dots, m$, *jsou otevřené. Pak* $\bigcap_{i=1}^m G_i$ *je otevřená množina v* $\mathbf{R}^n$.

Poznámka. Bod (ii) se stručně formuluje takto: *Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina.* Bod (iii) se stručně formuluje: *Průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina.* Průnik nekonečně mnoha otevřených množin nemusí být otevřená množina.

Definice. Nechť $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ a $\boldsymbol{x}^j \in \mathbf{R}^n$ pro každé $j \in \mathbf{N}$. Řekneme, že posloupnost $\{\boldsymbol{x}^j\}$ konverguje k bodu $\boldsymbol{x}$ (píšeme $\lim\limits_{j\to\infty} \boldsymbol{x}^j = \boldsymbol{x}$ nebo též $\boldsymbol{x}^j \to \boldsymbol{x}$), pokud $\lim\limits_{j\to\infty} \rho(\boldsymbol{x}^j, \boldsymbol{x}) = 0$.

Poznámka. $\boldsymbol{x}^j \to \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists j_0 \in \mathbf{N}\, \forall j \in \mathbf{N}, j \geq j_0 \colon \boldsymbol{x}^j \in B(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$.

Věta 3. *Nechť* $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ *a* $\boldsymbol{x}^j \in \mathbf{R}^n$ *pro každé* $j \in \mathbf{N}$. *Pak* $\boldsymbol{x}^j \to \boldsymbol{x}$, *právě když* $\lim\limits_{j\to\infty} x_i^j = x_i$ *pro každé* $i \in \{1, \dots, n\}$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$.

- Bod $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ nazveme **hraničním bodem množiny** M, pokud pro každé $r > 0$ platí $B(\boldsymbol{x}, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(\boldsymbol{x}, r) \cap (\mathbf{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$.
- **Hranicí množiny** M rozumíme množinu všech hraničních bodů M. Značíme ji $H(M)$.
- **Uzávěrem** množiny M rozumíme množinu $M \cup H(M)$ (značíme $\overline{M}$).
- Řekneme, že množina M je **uzavřená**, pokud obsahuje všechny své hraniční body (tj. $H(M) \subset M$, neboli $\overline{M} = M$).

Poznámka. $\overline{M}$ je nejmenší uzavřená množina obsahující M.

Věta 4. *Nechť* $M \subset \mathbf{R}^n$. *Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) M *je uzavřená.*

(2) $\mathbf{R}^n \setminus M$ *je otevřená.*

(3) *Každý bod* $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, *k němuž konverguje nějaká posloupnost* $\{\boldsymbol{x}^j\}$ *prvků množiny* M, *patří do množiny* M.

Věta 5 (vlastnosti uzavřených množin).

(i) *Prázdná množina a celý prostor* $\mathbf{R}^n$ *jsou uzavřené v* $\mathbf{R}^n$.

(ii) *Nechť množiny* $F_\alpha \subset \mathbf{R}^n,\ \alpha \in A$, *jsou uzavřené v* $\mathbf{R}^n$. *Pak* $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ *je uzavřená množina v* $\mathbf{R}^n$.

(iii) *Nechť množiny* $F_i,\ i = 1, \dots, m$, *jsou uzavřené. Pak* $\bigcup_{i=1}^m F_i$ *je uzavřená množina v* $\mathbf{R}^n$.