

II.3. Nevlastní limity

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu plus nekonečno (píšeme $\lim a_n = +\infty$), jestliže

$$\forall L \in \mathbf{R} \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : a_n > L.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu minus nekonečno (píšeme $\lim a_n = -\infty$), jestliže

$$\forall K \in \mathbf{R} \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : a_n < K.$$

Poznámka. Chování posloupnosti je možno rozlišit:

$$\lim a_n \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{vlastní, tj. je rovna reálnému číslu} \\ \text{nevlastní, tj. je rovna } +\infty \text{ nebo } -\infty \end{cases} \\ \text{neexistuje} \end{cases}$$

$$\text{Posloupnost } \{a_n\} \begin{cases} \text{konverguje, tj. má vlastní limitu} \\ \text{diverguje} \begin{cases} \text{diverguje k } +\infty \text{ nebo k } -\infty, \text{ tj. má nevlastní limitu} \\ \text{nemá limitu} \end{cases} \end{cases}$$

Věta 1 (jednoznačnost limity) a **Věta 3** (limita vybrané posloupnosti) platí i pro nevlastní limity.

Věta 2 pro nevlastní limity neplatí. Platí však:

Věta 2'.

- *Nechť $\lim a_n = +\infty$. Pak posloupnost $\{a_n\}$ není shora omezená, je však zdola omezená.*
- *Nechť $\lim a_n = -\infty$. Pak posloupnost $\{a_n\}$ není zdola omezená, je však shora omezená.*

Definice. Rozšířenou reálnou osou rozumíme množinu $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Rozšíření operací a uspořádání z \mathbf{R} na \mathbf{R}^* .

$$\begin{aligned} -\infty < a \text{ a } a < +\infty \text{ pro } a \in \mathbf{R}, \quad & -\infty < +\infty; \\ a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty \text{ pro } a \in \mathbf{R}^* \setminus \{-\infty\}; \\ a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty \text{ pro } a \in \mathbf{R}^* \setminus \{+\infty\}; \\ a - (-\infty) = +\infty \text{ pro } a \in \mathbf{R}^* \setminus \{-\infty\}; \quad & (-\infty) - a = -\infty \text{ pro } a \in \mathbf{R}^* \setminus \{-\infty\}; \\ a - (+\infty) = -\infty \text{ pro } a \in \mathbf{R}^* \setminus \{+\infty\}; \quad & (+\infty) - a = +\infty \text{ pro } a \in \mathbf{R}^* \setminus \{+\infty\}; \\ a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = \begin{cases} +\infty \text{ pro } a \in \mathbf{R}^*, a > 0, \\ -\infty \text{ pro } a \in \mathbf{R}^*, a < 0; \end{cases} \\ a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \begin{cases} -\infty \text{ pro } a \in \mathbf{R}^*, a > 0, \\ +\infty \text{ pro } a \in \mathbf{R}^*, a < 0; \end{cases} \\ \frac{a}{+\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0 \text{ pro } a \in \mathbf{R}; \\ \frac{+\infty}{a} = \begin{cases} +\infty \text{ pro } a \in (0, +\infty), \\ -\infty \text{ pro } a \in (-\infty, 0); \end{cases} \quad \frac{-\infty}{a} = \begin{cases} -\infty \text{ pro } a \in (0, +\infty), \\ +\infty \text{ pro } a \in (-\infty, 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Zbylé operace nejsou definovány. To jest, není definováno:

$$\begin{aligned} &(-\infty)+(+\infty), \quad (+\infty)+(-\infty), \quad (+\infty)-(+\infty), \quad (-\infty)-(-\infty), \\ &(+\infty)\cdot 0, \quad 0\cdot(+\infty), \quad (-\infty)\cdot 0, \quad 0\cdot(-\infty), \\ &\frac{+\infty}{+\infty}, \quad \frac{+\infty}{-\infty}, \quad \frac{-\infty}{-\infty}, \quad \frac{-\infty}{+\infty}, \quad \frac{a}{0} \text{ pro } a \in \mathbf{R}^*. \end{aligned}$$

Věta 4' (aritmetika limit podruhé). *Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^*$ a $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^*$. Potom platí:*

- (i) $\lim (a_n \pm b_n) = A \pm B$, pokud je pravá strana definována,
- (ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, pokud je pravá strana definována,
- (iii) $\lim a_n/b_n = A/B$, pokud je pravá strana definována.

Věta 5 (limita a uspořádání) a **Věta 6** (o dvou polícajtech) platí pro nevlastní limity též. Dokonce platí:

Věta 6' (o jednom polícajtovi). *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti.*

- (i) *Nechť existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$, a dále platí $\lim a_n = +\infty$. Pak $\lim b_n = +\infty$.*
- (ii) *Nechť existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí $a_n \geq b_n$, a dále platí $\lim a_n = -\infty$. Pak $\lim b_n = -\infty$.*

Věta 8 (doplňky k aritmetice limit). *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou dvě posloupnosti.*

- (1) *Je-li $\lim a_n = +\infty$ a $\{b_n\}$ je zdola omezená, pak $\lim(a_n + b_n) = +\infty$.*
- (2) *Je-li $\lim a_n = -\infty$ a $\{b_n\}$ je shora omezená, pak $\lim(a_n + b_n) = -\infty$.*
- (3) *Je-li $\lim a_n = +\infty$ a existuje takové $c > 0$ a takové $n_0 \in \mathbf{N}$, že pro všechna přirozená $n \geq n_0$ je $b_n \geq c$, pak $\lim a_n b_n = +\infty$.*
- (4) *Je-li $\lim a_n > 0$ (tj. limita existuje a je buď $+\infty$ nebo kladné reálné číslo), $\lim b_n = 0$ a existuje takové $n_0 \in \mathbf{N}$, že pro všechna přirozená $n \geq n_0$ je $b_n > 0$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.*
- (5) *Je-li posloupnost $\{a_n\}$ omezená a $\lim |b_n| = +\infty$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$.*

Tvrzení analogická tvrzením (3) a (4) platí i pro ostatní kombinace znamének.