

## IV.4 Funkce spojité na intervalu

**Definice.** Nechť  $J$  je (nedegenerovaný) interval. Funkce  $f : J \rightarrow \mathbf{R}$  je **spojitá na intervalu**  $J$ , je-li spojitá zprava v každém bodě, který není koncovým bodem intervalu  $J$ , a spojitá zleva v každém bodě, který není počátečním bodem  $J$ .

**Věta 15** (Heineho věta pro spojitost na intervalu). *Nechť  $J$  je interval a  $f : J \rightarrow \mathbf{R}$  je funkce. Pak  $f$  je spojitá na intervalu  $J$ , právě když pro každé  $x \in J$  a každou posloupnost  $\{x_n\}$  prvků  $J$  takovou, že  $\lim x_n = x$ , platí  $\lim f(x_n) = f(x)$ .*

**Věta 16** (o spojitosti složené funkce na intervalu). *Nechť  $I$  a  $J$  jsou intervaly, funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $J$ , funkce  $g$  je spojitá na intervalu  $I$  a splňuje  $g(I) \subset J$ . Pak funkce  $f \circ g$  je spojitá na intervalu  $I$ .*

**Věta 17** (Bolzanova o nabývání mezihodnot). *Nechť  $f$  je spojitá funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a platí  $f(a) < f(b)$ . Pak ke každému  $c \in (f(a), f(b))$  existuje  $x \in (a, b)$  takové, že  $f(x) = c$ .*

**Věta 18** (o spojitém obrazu intervalu). *Nechť  $J$  je interval a funkce  $f : J \rightarrow \mathbf{R}$  je spojitá na  $J$ . Potom  $f(J)$  je interval nebo jednobodová množina.*

**Věta 19** (o omezenosti spojitě funkce na uzavřeném intervalu). *Budiž  $f$  funkce spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Potom je  $f$  na  $\langle a, b \rangle$  omezená.*

**Věta 20** (spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá extrémů). *Budiž  $f$  funkce spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Potom funkce  $f$  nabývá na  $\langle a, b \rangle$  své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima).*

**Věta 21** (o spojitosti inverzní funkce). *Budiž  $f$  spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu  $J$ . Potom funkce  $f^{-1}$  je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu  $f(J)$ .*

**Věta 22** (derivace inverzní funkce). *Nechť funkce  $f$  je na intervalu  $(a, b)$  spojitá a ryze monotonní a má v bodě  $x_0 \in (a, b)$  derivaci  $f'(x_0)$  vlastní a různou od nuly. Potom má funkce  $f^{-1}$  derivaci v bodě  $y_0 = f(x_0)$  a platí rovnost*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

**Poznámka.** Pokud v situaci popsané v předchozí větě je  $f'(x_0)$  nevlastní, je  $(f^{-1})'(y_0) = 0$ . Je-li  $f'(x_0) = 0$ , je  $(f^{-1})'(y_0) = \begin{cases} +\infty, & \text{je-li } f \text{ rostoucí,} \\ -\infty, & \text{je-li } f \text{ klesající.} \end{cases}$