TEST 2, KRUH 4, PŘÍKLAD A1

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

funkce spojitá na $(-1,1)$ $\Rightarrow$ zde budeme počítat prim. fun. − funkci. 1 bod

$\Downarrow$

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot(1+x)}\,dx = \int \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{(x+1)^2}\,dx$$ 1 bod

1 bod

substituce $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $x \in (-1,1) \Rightarrow y \in (0,+\infty)$ 1 bod

$$y^2 = \frac{1+x}{1-x}$$

$$y^2 - y^2 x = 1+x$$

$$x(-y^2-1) = 1-y^2$$

$$x = \frac{y^2-1}{y^2+1}$$ 2 body

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y(y^2+1)-2y(y^2-1)}{(y^2+1)^2} = \frac{4y}{(y^2+1)^2} > 0$$ 1 bod

2 body

Počítáme tedy: na $(0,+\infty)$

$$\int \frac{y\cdot\frac{4y}{(y^2+1)^2}}{\left(\frac{y^2-1}{y^2+1}+1\right)^2}\,dy = \int \frac{4y^2}{4y^4}\,dy = \int \frac{1}{y^2}\,dy = -\frac{1}{y} + C$$

1 bod

Původní prim. fce: $$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C \quad \text{na } (-1,1)$$

—————— *** ——————

varianta: substituce $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $x \in (-1,1) \Rightarrow y \in (0,+\infty)$

$$y^2 = \frac{1-x}{1+x}$$

$$y^2 + y^2 x = 1-x$$

$$x(1+y^2) = 1-y^2$$

$$x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{4y}{(y^2+1)^2} < 0$$ [viz první variantu]

Počítáme $$\int \frac{1}{\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}+1\right)^2\cdot y}\cdot\frac{(-4y)}{(1+y^2)^2}\,dy = \int -1\,dy = -y + C$$

(pův. prim. fce vyjde stejně jako výše)

TEST 2, KRUH 4, PŘÍKLAD B1

$$\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

funkce spojitá na $(-1,1)$
$\Rightarrow$ prim. funkce bude existovat na $(-1,1)$

$$\Updownarrow$$

$$\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,(1+x)}\,dx = \int \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{x^2-1}\,dx$$

subst.: $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ... jako v řešení A1 : $y \in (0,\infty)$

$$x = \frac{y^2-1}{y^2+1}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{4y}{(y^2+1)^2} > 0$$

počítáme na $(0,\infty)$:

$$\int \frac{y}{\left(\frac{y^2-1}{y^2+1}\right)^2 - 1}\cdot\frac{4y}{(y^2+1)^2}\,dy = \int \frac{4y^2}{(y^2-1)^2-(y^2+1)^2}\,dy = \int \frac{4y^2}{-4y^2}\,dy =$$

$$= \int -1\,dy = -y + C$$

$\Rightarrow$ příslušná prim. funkce k $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$ na $(-1,1)$

ALTERNATIVA: substituce $x = \sin t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t > 0$$

počítáme na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$: $\displaystyle\int \frac{1}{(\sin t - 1)}\cdot\frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\,dt = \int \frac{1}{\sin t - 1}\,dt$ $\quad\left(\sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t| = \cos t \text{ na } (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\right)$

substituce $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = y$ ... po provedení počítáme $\displaystyle\int \frac{1}{\left(\frac{2y}{y^2+1} - 1\right)}\cdot\frac{2}{1+y^2}\,dy =$
$(y \in (-1,1))$

$$= \int -\frac{1}{(y-1)^2}\,dy = +\frac{1}{y-1} + C \quad \text{na } (-1,1)$$

tedy příslušná prim. f-ce: $\displaystyle\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) - 1} + C$ na $(-1,1)$

TEST 2, KRUH 4, PŘÍKLAD A2

$\int \frac{\cos t}{e^t}\,dt$ ... p.f. existuje na $\mathbb{R}$, na $\mathbb{R}$ též počítáme 1.5 b Cf

$\Downarrow$

$\int e^{-t}\cos t\,dt \overset{2\text{ body}}{=} -e^{-t}\cos t - \int(-e^{-t})\cdot(-\sin t)\,dt =$

p.p.
$u' = e^{-t}$. $u = -e^{-t}$
$v = \cos t$ $v' = -\sin t$

$= -e^{-t}\cos t - \int e^{-t}\cdot \sin t\,dt \overset{2\text{ body}}{=} -e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t - \int e^{-t}\cdot\cos t\,dt$

p.p.
$u' = e^{-t}$ $u = -e^{-t}$
$v = \sin t$ $v' = \cos t$

5 bodů

Tedy: $\int e^{-t}\cos t\,dt = -\frac{1}{2}e^{-t}\cos t + \frac{1}{2}e^{-t}\sin t + C$ na $\mathbb{R}$

PŘÍKLAD B2

$\int \frac{\sin t}{e^{2t}}\,dt$ ... p.f. ex. na $\mathbb{R}$, na $\mathbb{R}$ též počítáme

$\Downarrow$

$\int e^{-2t}\cdot \sin t\,dt = -e^{-2t}\cos t - \int (-2e^{-2t})\cdot(-\cos t)\,dt =$

p.p.
$u' = \sin t$ $u = -\cos t$
$v = e^{-2t}$ $v' = -2e^{-2t}$

$= -e^{-2t}\cos t - 2\cdot\int e^{-2t}\cdot\cos t\,dt = -e^{-2t}\cos t - 2e^{-2t}\sin t +$

p.p.
$u' = \cos t$ $u = \sin t$
$v = e^{-2t}$ $v' = -2e^{-2t}$

$+2\int(-2e^{-2t})\sin t\,dt = -e^{-2t}\cos t - 2e^{-2t}\sin t - 4\int e^{-2t}\sin t\,dt$

Tedy $\int e^{-2t}\sin t\,dt = -\frac{1}{5}e^{-2t}\cos t - \frac{2}{5}e^{-2t}\sin t + C$ na $\mathbb{R}$

TEST 2, KRUH 4, PŘÍKLAD A3

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n+1}$$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n^2} = 1$, tj. polomer konv. je 1

1 bod

sčítame na $(-1,1)$

1 bod

$$= x^2 \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}\right) = x^2 \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n\right)' \underset{2\,\text{body}}{=} x^2 \cdot \left(x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\right)' =$$

$$= x^2 \cdot \left(x \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)'\right)' = x^2 \cdot \left(x \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)' =$$

2 body, 1 bod

3 body:

$$= x^2 \cdot \left(x \cdot \frac{1\cdot(1-x) - x\cdot(-1)}{(1-x)^2}\right)' = x^2 \cdot \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = x^2 \cdot \frac{1\cdot(1-x)^2 - x \cdot 2(1-x)\cdot(-1)}{(1-x)^4} =$$

$$= x^2 \cdot \frac{1-x+2x}{(1-x)^3} = \frac{x^2(1+x)}{(1-x)^3}, \quad x \in (-1,1)$$

Použito: věta o derivaci mocninné řady, vzorec pro součet geometrické řady, pravidla pro derivování

PŘÍKLAD B3:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)^2 x^n$$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n-1)^2} = 1$, tj. pol. konv. 1 $\Rightarrow$ sčítame na $(-1,1)$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)^2 x^n = x^2 \cdot \left(\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)^2 x^{n-2}\right) =$$

$$= x^2 \cdot \left(\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) x^{n-1}\right)' = x^2 \cdot \left(x \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) x^{n-2}\right)' =$$

$$= x^2 \cdot \left(x \cdot \left(\sum_{n=2}^{\infty} x^{n-1}\right)'\right)' = x^2 \cdot \left(x \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)' =$$

$$= \dots = \frac{x^2(1+x)}{(1-x)^3}, \quad x \in (-1,1)$$

Výpočet týž jako v příkladu A3