Konvergence integrálu $\int_1^\infty x^\gamma \cos(x^\alpha) \cos^\beta \frac{1}{x}\, dx$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

- Integrand je spojitý na $\langle 1, \infty)$ $\Rightarrow$ stačí vyšetřit v $+\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos^\beta \frac{1}{x} = 1 \in (0, \infty)$ a funkce $x \mapsto \cos^\beta \frac{1}{x}$ je monotónní na $\langle 1, \infty)$ (klesající pro $\beta < 0$, konstantní pro $\beta = 0$, rostoucí pro $\beta > 0$)

$\Rightarrow$ dle symetrické verze Abelova kritéria integrál ze zadání konverguje (absolutně), právě když konverguje (absolutně) integrál $\int_1^\infty x^\gamma \cos(x^\alpha)\, dx$

~~provedeme substituci~~ $\cancel{y = x^\alpha}$

- pokud $\alpha \leq 0$ platí $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\gamma \cos(x^\alpha)}{x^\gamma} = \begin{cases} 1 & \alpha < 0 \\ \cos 1 & \alpha = 1 \end{cases}$

Tedy integrál konv. $\Leftrightarrow$ konv. $\int_1^\infty x^\gamma\, dx$ $\Leftrightarrow$ $\gamma < -1$
(navíc je pak shodná, tj. $K \hat{=} AK$)

- $\alpha > 0$ $\Rightarrow$ provedeme substituci $y = x^\alpha$, tj. $x = y^{1/\alpha}$, $y \in \langle 1, \infty)$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha} - 1} > 0$$

Tedy $\int_1^\infty x^\gamma \cos(x^\alpha)\, dx = \int_1^\infty y^{\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha} - 1} \cos(x)\, dx$

Ze cvičení víme, že tento integrál
- konverguje absolutně $\Leftrightarrow$ $\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} - 1 < -1$
- konv. neabsolutně $\Leftrightarrow$ $\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} - 1 \in \langle -1, 0)$
- diverguje $\Leftrightarrow$ $\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} - 1 \geq 0$

První možnost ... $\gamma < -1$
druhá možnost $\gamma \in \langle -1, -1 + \alpha)$
třetí možnost $\gamma \geq -1 + \alpha$

Závěr: KA pokud $\gamma < -1$, KNA pokud $\alpha > 0$, $\gamma \in \langle -1, -1+\alpha)$, D jinak