DDÚ 2, KRUH 4

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(a+b)^k}{k} + \frac{(a-3b)^k}{k^2} + (2b)^k \right) (x+4)^k$$

$a, b > 0$ parametry

---

[1] Poloměr konvergence:

Spočtěme $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left| \frac{(a+b)^k}{k} + \frac{(a-3b)^k}{k^2} + (2b)^k \right|}$

přitom $a+b>0$, $2b>0$, ale prostřední člen může být kladný či záporný

z věty o policajtech:

$$\sqrt[k]{|\cdots|} \le \sqrt[k]{\frac{(a+b)^k}{k} + \frac{|a-3b|^k}{k^2} + (2b)^k} \le$$

$$\le \sqrt[k]{3 \cdot \max(a+b, |a-3b|, 2b)^k} = \sqrt[k]{3} \cdot \max(a+b, |a-3b|, 2b)$$

$$\downarrow$$

$$\max(a+b, |a-3b|, 2b)$$

obrácená nerovnost – rozlišíme případy

$b > a \Rightarrow$ • $2b > a+b$

• $a-3b<0 \Rightarrow |a-3b| = 3b-a = 2b + b - a > 2b$

Tedy $|a-3b| = 3b-a > 2b > a+b$

$$\sqrt[k]{|\cdots|} \ge \sqrt[k]{\frac{|a-3b|^k}{k^2} - \frac{(a+b)^k}{k} - (2b)^k} =$$

$$= \frac{|a-3b|}{\sqrt[k]{k^2}} \sqrt[k]{1 - k \cdot \left(\frac{a+b}{|a-3b|}\right)^k - k^2 \cdot \left(\frac{2b}{|a-3b|}\right)^k} \ge$$

$\downarrow$
1 pro $k\to\infty \Rightarrow$ pro dost velká k je to $> \frac{1}{2}$. Pro takové platí

$$\ge \frac{|a-3b|}{\sqrt[k]{k^2}} \cdot \sqrt[k]{\frac{1}{2}} \longrightarrow |a-3b| = 3b-a$$

Tedy $R = \frac{1}{|a-3b|} = \frac{1}{3b-a}$

$b = a$: $\quad a+b = 2b, \quad a-3b = -2b$

mamy szereg $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (2b)^k \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{(-1)^k}{k^2} + 1\right)(x+4)^k$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|(2b)^k\left(\frac{1}{k}+\frac{(-1)^k}{k^2}+1\right)\right|} = 2b,$$

wydaje

$$\sqrt[k]{\left|(2b)^k\left(\frac{1}{k}+\frac{(-1)^k}{k^2}+1\right)\right|} \le \sqrt[k]{3\cdot(2b)^k} \to 2b$$

$$\le$$

$$2b = \sqrt[k]{(2b)^k}$$

Tog $R = \dfrac{1}{2b}$

$b < a \Rightarrow$ • $a+b > 2b$

$a-3b > 0 \Rightarrow a > 3b \Rightarrow 0 < a-3b < a < a+b$

$\Rightarrow |a-3b| < a+b$

$2b < a+b$

$a-3b < 0 \Rightarrow |a-3b| = 3b-a = 2b+b-a < 2b$

$\Rightarrow 0 < 3b-a < 2b < a+b$

$$\sqrt[k]{|\ \ldots\ |} \ge \sqrt[k]{\frac{(a+b)^k}{k} - \frac{|a-3b|^k}{k^2}} = \frac{a+b}{\sqrt[k]{k}} \cdot \sqrt[k]{1 - \underbrace{\frac{1}{k^2}\left(\frac{|a-3b|}{a+b}\right)^k}_{\to 0}}$$

$$\ge \frac{a+b}{\sqrt[k]{k}} \cdot \sqrt[k]{\frac{1}{2}} \longrightarrow a+b$$

tog pro velk k je to $< \frac{1}{2}$. Pro takto k plat -

Tog $R = \dfrac{1}{a+b}$

Zuhrn: $\quad R = \dfrac{1}{\max(a+b,\ |a-3b|)}$

Pozn.: Ukázali jsme rozborem případů spočítáním několika počátečních,

že $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\ldots|} = \max(a+b, |a-3b|, 2b) = \max(a+b, |a-3b|)$.

Kdybychom počítali jen lim sup, lze postupovat rychleji:

- Víme, že $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\ldots|} \le \max(a+b, |a-3b|, 2b)$

- platí: $\sqrt[2k]{\left|\frac{(a+b)^{2k}}{2k} + \frac{(a-3b)^{2k}}{(2k)^2} + (2b)^{2k}\right|} = \sqrt[2k]{\frac{(a+b)^{2k}}{2k} + \frac{|a-3b|^{2k}}{(2k)^2} + (2b)^{2k}} \ge$

$$\ge \sqrt[2k]{\frac{1}{(2k)^2} \max(a+b, |a-3b|, 2b)^k} \longrightarrow \max(a+b, |a-3b|, 2b)$$

Tedy limita členů se sudým indexem je rovna $\max(a+b, |a-3b|, 2b)$,

a tedy $\limsup \sqrt[k]{| \quad |} = \max(a+b, |a-3b|, 2b)$

Konvergence na hranici:

$b=a$ ... $\sum_{k=1}^{\infty} (2b)^k \left(\frac{1}{k} + \frac{(-1)^k}{k^2} + 1\right)(x+y)^k$ pro $|x+y| = \frac{1}{2b}$ diverguje,

protože není splněna nutná podmínka konvergence

$$\left(\frac{1}{k} + \frac{(-1)^k}{k^2} + 1 \longrightarrow 1 \ne 0\right)$$

$a>b$ ... $R = \frac{1}{3b-a}$ $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a+b)^k}{k}(x+y)^k$ pro $|x+y| = \frac{1}{3b-a}$ K.A.

(např. dle odmocninového kritéria)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(a-3b)^k}{k^2}(x+y)^k\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \ldots \text{K.A.}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} (2b)^k (x+y)^k$ K.A., je to geom. řada

s kvocientem $2b(x+y)$

a $|2b(x+y)| < 1$

Tedy v tomto případě

na hranici K.A.

$a < b \;\ldots\; R = \frac{1}{a+b}$, necht' $|t+y| = \frac{1}{a+b}$

* absolutní konv.:

$$\left| \left(\frac{(a+b)^k}{k} + \frac{(a-3b)^k}{k^2} + (2b)^k \right) (t+y)^k \right| \geq$$

$$\geq \frac{1}{k} - \frac{|a-3b|^k}{(a+b)^k} \cdot \frac{1}{k^2} + \left(\frac{2b}{a+b} \right)^k \Rightarrow D., \text{ protože}$$

$\sum \frac{1}{k}$ D., $\sum \left(\frac{|a-3b|}{(a+b)} \right)^k \frac{1}{k^2}$ k. A. (odmocninové krit.)

$\sum \left(\frac{2b}{a+b} \right)^k$ k. A. (geom. řada)

$\Rightarrow$ pro $|t+y| = \frac{1}{a+b}$ nekonverguje absolutně

---

odtud plyne, že pro $t+y = \frac{1}{a+b}$ D.

pro $x+y \neq \frac{1}{a+b}$, $|t+y| = \frac{1}{a+b}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a+b)^k (t+y)^k}{k}$$ k. dle Dirichletova krit.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a-3b)^k (t+y)^k}{k^2}$$ k. A. (dle odmocninového krit.)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2b)^k (t+y)^k$$ k. A. (geom. řada)

Tedy: konverguje neabsolutně.

Shrnutí:

$a > b$: $|x+y| \leq \frac{1}{3b-a}$ k. A., $|t+y| > \frac{1}{3b-a}$ .. D.

$a = b$: $|t+y| < \frac{1}{2b}$ k. A., $|t+y| \geq \frac{1}{2b}$ .. D

$a < b$: $|t+y| < \frac{1}{a+b}$ k. A., $|t+y| = \frac{1}{a+b}$, $t+y \neq \frac{1}{a+b}$ k. N. A.

$\left. \begin{array}{l} |t+y| > \frac{1}{a+b} \\ \text{nebo } t+y = \frac{1}{a+b} \end{array} \right\}$ .. D.