DDÚ2 - KRCH3

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a^k}{k}+\frac{1}{k^2a^k}-kb^k\right)(x+3)^k$$

1 Poloměr konvergence

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{a^k}{k}+\frac{1}{k^2a^k}-kb^k\right|}\ :$$

$$\sqrt[k]{|\ldots|}\leq\sqrt[k]{3k\cdot\max\left(a,\frac{1}{a},b\right)^k}\longrightarrow\max\left(a,\frac{1}{a},b\right)$$

pro opačnou nerovnost rozlišíme případy:

- $b\geq\max\left(a,\frac{1}{a}\right)$

$$\Rightarrow\sqrt[k]{|\ldots|}=\sqrt[k]{kb^k-\frac{a^k}{k}-\frac{1}{k^2a^k}}=\sqrt[k]{k}\cdot b\cdot\sqrt[k]{\underbrace{1-\left(\frac{a}{b}\right)^k\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}\frac{1}{a^kb^k}}_{\to 1\text{, tedy od jisté } k \text{ je to } >\frac{1}{2}\text{, pak}}}$$

$$\geq\sqrt[k]{k}\cdot b\cdot\sqrt[k]{\frac{1}{2}}\to b$$

$c:=\max\left(a,\frac{1}{a}\right)>b$

$$\Rightarrow\sqrt[k]{|\ldots|}\geq\sqrt[k]{\frac{c^k}{k^2}-kb^k}=\frac{c}{\sqrt[k]{k^2}}\sqrt[k]{\underbrace{1-k^3\left(\frac{b}{c}\right)^k}_{\to 1\text{, tedy od jisté } k \text{ je to } >\frac{1}{2}\text{. Pak}}}\geq\frac{c}{\sqrt[k]{k^2}}\sqrt[k]{\frac{1}{2}}\to c$$

Tedy: lim je opravdu $\max\left(a,\frac{1}{a},b\right)$

a $R=\dfrac{1}{\max\left(a,\frac{1}{a},b\right)}$

$\boxed{2}$ konvergence na kružnici ... je třeba rozlišit řada případů

- $a > 1,\ b > a \Rightarrow R = \frac{1}{b}$

pro $|t+3| = \frac{1}{b}$: $\sum \frac{a^k (t+3)^k}{k}$, $\sum \frac{(t+3)^k}{k^2 a^k}$ K. A. (odm. krit.)

$k \cdot b^k \cdot (t+3)^k \not\to 0$

Tedy řada D.

- $a > 1,\ b = a \Rightarrow R = \frac{1}{b} = \frac{1}{a}$

pro $|t+3| = \frac{1}{b}$ opět není splněna nutn. podm. konvergence

- $a > 1,\ b < a \Rightarrow R = \frac{1}{a}$

pro $|t+3| = \frac{1}{a}$: $\left|\left(\frac{a^k}{k} + \frac{1}{k^2 a^k} - k b^k\right)(t+3)^k\right| \geq$

$\geq \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2 a^{2k}} - k \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^k$, tedy diverguje,

protože $\sum \frac{1}{k}$ D., $\sum \frac{1}{k^2 a^{2k}}$, $\sum k \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^k$ K. A. (odm. krit.)

tedy nekonverguje absolutně

Proto pro $t+3 = \frac{1}{a}$ D.

pro $t+3 \neq \frac{1}{a}$, $|t+3| = \frac{1}{a}$: $\sum \frac{a^k (t+3)^k}{k}$ K. (Dirichlet)

$\sum \frac{1}{k^2 a^k} (t+3)^k$ K. A. $\Big\}$ odmocninové krit.

$\sum k \cdot b^k (t+3)^k$ K. A.

$\Rightarrow$ K. N. A.

- $a = 1,\ b > 1$ .. $R = \frac{1}{b}$, na kružnici D., protože není splněna nutn. podm. konvergence

$a = 1 = b$ ... $R = 1$, na kružnici není splněna nutn. podm. konvergence

• $a = 1,\ b < 1$ ... $R = 1$. Vyjde podobně jako případ

$a > 1,\ b < a$, jen pro konvergenci $\sum \frac{1}{k^2}(t+3)^k$ použijeme

srovnání s $\sum \frac{1}{k^2}$

Tedy: nekonverguje absolutně

pro $\cancel{|t+3|}\ t+3 = 1$ diverguje,

pro $|t+3| = 1$, $t+3 \neq 1$ K.N.A.

• $a < 1,\ b > \frac{1}{a} \Rightarrow R = \frac{1}{b}$, na hranici nesplněna nutná podm.

konvergence

• $a < 1,\ b = \frac{1}{a} \Rightarrow R = \frac{1}{b} = a$, na hranici nesplněna nutná podm.

konvergence

$a < 1,\ b < \frac{1}{a} \Rightarrow R = a$, na hranici K.A., protože

$\sum \frac{a^k (t+3)^k}{k}$ K.A. (odm. krit.)

$\sum \frac{(t+3)^k}{k^2 a^k}$ K.A. (| | $= \frac{1}{k^2}$)

$\sum k b^k (t+3)^k$ K.A. (odm. krit.)

Shrnutí: • $b \geq \max(a, \frac{1}{a}) \Rightarrow$ na hranici nesplněna nutná podmínka konvergence

• $b < \max(a, \frac{1}{a})$ — $a < 1$ ... K.A. i na hranici

$a \geq 1$ ... v bodě $t+3 = R$ D

v bodech $t+3 \neq R$, $|t+3| = R$ K.N.A