M je uzavřená podle příkladu 7 ze supersemináře (funkce použité k její definici jsou spojité na R^3). M je omezená, protože je obsažena v uzavřené kouli o středu 0 a poloměru 1 (to plyne z první rovnice v definici M). M je neprázdná, protože obsahuje třeba bod [1/odmocnina(2),-1/odmocnina(2),0]. Neprázdnost též plyne z následujícího výpočtu, protože nějaké body v M najdeme. Je dobré si též představit, jak M vypadá - první rovnice určuje jednotkovou sféru (povrch koule) o středu 0, druhá rovnice určuje nějakou rovinu procházející počátkem, M je průnik, tedy nějaká kružnice se středem v počátku o poloměru 1.

Příklad 48. Nalezněte maximum a minimum funkce $f(x,y,z) = xyz$ na množině $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1, x+y+z = 0\}$.

Řešení. Množina M je kompaktní a funkce f je spojitá, nabývá tedy na M maxima a minima. Pro nalezení bodů, kde by mohl být lokální extrém funkce f vzhledem k množině M, použijeme předchozí větu. Položme $G = \mathbb{R}^3$,

dokonce na celém R^3, tedy i na M

Větu V.19

$$g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1, \qquad g_2(x,y,z) = x+y+z.$$

Funkce f, g_1 a g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1$. Vypočítejme příslušné parciální derivace.

na celém R^3; dokonce jsou třídy C^nekonečno. Plyne to z pravidel počítání derivací. Že jsou C^1 plyne i z toho, že níže spočtené parciální derivace jsou zřejmě spojité.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yz, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy,$$
$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z,$$
$$\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = 1, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = 1, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = 1.$$

Vektory $[2x,2y,2z]$ a $[1,1,1]$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když platí $x = y = z$. Žádný bod s touto vlastností ovšem neleží v množině M, neboť pro bod $[x,x,x]$ by muselo současně platit $g_1(x,x,x) = 3x^2 - 1 = 0$ i $g_2(x,x,x) = 3x = 0$, což nelze. Je tedy třeba vyřešit tuto nelineární soustavu:

Jsou-li lineárně závislé, je jeden z nich násobkem druhého. Pokud [1,1,1] je c-násobkem [2x,2y,2z], pak c není 0, a tedy [2x,2y,2z] je 1/c-násobkem [1,1,1]. Tedy v každém případě je [2x,2y,2z] násobkem [1,1,1], tedy x=y=z.

$$yz + \lambda_1 2x + \lambda_2 = 0, \tag{21}$$
$$xz + \lambda_1 2y + \lambda_2 = 0, \tag{22}$$
$$xy + \lambda_1 2z + \lambda_2 = 0, \tag{23}$$
$$x^2+y^2+z^2-1 = 0, \tag{24}$$
$$x+y+z = 0. \tag{25}$$

Odečtením (22) od (21) dostaneme: Poznámka: Obecně není žádný návod, jak takovouto soustavu řešit.

$$-z(x-y) + 2\lambda_1(x-y) = 0. \tag{26}$$

Většinou se snažíme vhodnými operacemi s rovnicemi vyloučit multiplikátory lambda_1,lambda_2, protože jejich hodnoty nás nezajímají.

Odtud plyne, že musí být $z = 2\lambda_1$ nebo $x = y$. Podobně odečtením (23) od (22) dostaneme:

$$-x(y-z) + 2\lambda_1(y-z) = 0. \tag{27}$$

Toto dává $x = 2\lambda_1$ nebo $y = z$. Ze vztahů (26) a (27) tedy vyplývá, že musí být buď $x = y$, nebo $y = z$, nebo $x = z$. Podívejme se nejprve na první případ, kdy $x = y$. Z (25) máme $z = -2x$ a (24) pak dává $6x^2 = 1$, tj. $x = 1/\sqrt{6}$ nebo $x = -1/\sqrt{6}$. K těmto bodům lze skutečně dopočítat

Další poznámka: Optimální je při řešení rovnic používat ekvivalentní úpravy. Ale ne vždy to je nezbytné. V těchto úlohách je podstatné žádný bod neopomenout, ale v principu nevadí, když zahrneme nějaký bod navíc. Proto je důležité, aby každé řešení uvedené soustavy bylo zahrnuto v seznamu "podezřelých bodů", ale nemusíme ověřovat, zda všechny nalezené body soustavu rovnic splňují. Je ovšem nezbytné, aby nalezené body patřily do množiny M.

Výpočet je zcela stejný, jen s prohozenými rolemi x,y,z (funkce f, g_1 i g_2 jsou symetrické vzhledem k x,y,z, tj. prohození proměnných hodnotu nezmění).

Máme totiž y=x a z=-2x. Hodnoty multiplikátorů nepočítáme, nezajímají nás.

Z prvního případu (x=y) dostname třetí a šestý bod; z druhého případu (y=z) dostaneme první a čtvrtý bod; z třetího případu (x=z) pak druhý a pátý bod.

příslušná y, z, λ_1 a λ_2. Případy $y = z$ a $z = x$ vyřešíme obdobně. Obdržíme tyto podezřelé body:

$$\left[\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right], \quad \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right], \quad \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right],$$
$$\left[-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right], \quad \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right], \quad \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right].$$

Hodnota f v bodech v prvním řádku je 1/(3.odmocnina(6)) a v druhém řádku je to číslo opačné. Víme, že maximum i minimum se nabývá (viz začátek řešení), pomocí Věty V.19 a výpočtu jsme zjistili, že extrémy nemohou být nikde jinde než mezi nalezenými šesti body. Proto maximum na M je v těch bodech z oněch šesti, kde je největší hodnota (a minimum tam, kde je hodnota nejmenší).

Výpočtem hodnot funkce f v uvedených bodech zjistíme, že v prvním řádku jsou body, kde funkce f nabývá maxima na M, a ve druhém řádku jsou body, kde f nabývá minima na M. ♣

Příklad 49. Nalezněte maximum a minimum funkce $f(x, y, z) = xyz$ na množině $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z \geq 0\}$.

Řešení. Množina M je kompaktní, neboť M je uzavřená polokoule. Funkce f je spojitá na M, takže nabývá na M maxima i minima. Body podezřelé z extrému budeme hledat zvlášť vzhledem k vnitřku množiny M a zvlášť vzhledem k hranici M. Mimo takto nalezené body již nemůže existovat další bod extrému, neboť je-li $\boldsymbol{x} \in A \subset M$ bod extrému vzhledem k M, pak je to i bod extrému vzhledem k A.

Kompaktnost lze zdůvodnit i bez geometrické představy - uzavřenost plyne z příkladu 7 k supersemináři, omezenost z první nerovnosti, z které plyne, že M je obsažena v uzavřené kouli o středu 0 a poloměru 1. Navíc M obsahuje počátek, tedy je neprázdná. Ale geometrická představa je též dobrá: První nerovnost dává zmíněnou uzavřenou kouli, druhá nerovnost dává poloprostor, jehož hraniční rovina prochází počátkem, a to poloprostor uzavřený (včetně hraniční roviny). Proto je M uzavřená polokoule (průnik koule a poloprostoru, jehož hraniční rovina obsahuje střed koule).

Vnitřek M je roven $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 < 1, x + y + z > 0\}$. Funkce f je třídy $\mathscr{C}^1$. Body podezřelé z extrému vzhledem k $\operatorname{Int} M$ jsou body, v nichž jsou všechny parciální derivace prvního řádu rovny 0. Platí $\nabla f(x, y, z) = [yz, xz, xy]$. Tento vektor je roven nulovému vektoru právě v bodech s alespoň dvěma nulovými souřadnicemi, tj. na souřadnicových osách. Body podezřelé z extrému ležící v $\operatorname{Int} M$ jsou tedy právě prvky některé z následujících množin:

$$\{[x, 0, 0];\ x \in (0, 1)\}, \quad \{[0, y, 0];\ y \in (0, 1)\} \quad \text{a} \quad \{[0, 0, z];\ z \in (0, 1)\}.$$

Toto je skutečně vnitřek M, jak plyne z geometrické představy - vnitřek uzavřené polokoule je otevřená polokoule. Ale pro výpočet není podstatné, že je to opravdu vnitřek. Důležité je jednak, že je to otevřená podmnožina M, a tedy v bodech extrémů lze použít Větu V.6; a pak to, že na zbytek množiny M lze použít Věta V.19 (alespoň po částech). Obecně totiž nemusí být zřejmé, ba ani platit, že záměnou nerovností neostrých za ostré se dostane vnitřek (viz příklad 5c ze supersem.). Naštěstí to není třeba ověřovat.

Hranici $H(M)$ si rozdělíme na části

$$H_1 = \{[x, y, z] \in G_1;\ x + y + z = 0\}, \quad \text{kde}$$
$$G_1 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\},$$
$$H_2 = \{[x, y, z] \in G_2;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \quad \text{kde}$$
$$G_2 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z > 0\},$$
$$H_3 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}.$$

Všimněme si, že množiny G_1 a G_2 jsou otevřené. Pro nalezení bodů podezřelých z extrému vzhledem k množině H_1, resp. H_2, H_3, můžeme použít větu o Lagrangeových multiplikátorech.

Množinu M máme tedy rozdělenou na čtyři části. Lze k tomu přistupovat analyticky či geometricky. Analytický přístup lze popsat takto: Máme množinu danou neostrými nerovnostmi. Pro každou z nerovností máme pak dvě možnosti - buď platí ostrá nerovnost nebo rovnost. Rozdělíme tedy množinu na potřebný počet částí tak, že každá část je dána pouze ostrými nerovnostmi a rovnostmi. V našem případě máme M danou nerovnostmi <= a >=. Rozdělíme na čtyři části: < a > (vnitřek), < a = (H_1), = a > (H_2), = a = (H_3). Pokud je množina dána pouze ostrými nerovnostmi, je otevřená, a tedy lze použít Věta V.6. Pokud je dána rovnostmi (a k tomu případně ostrými nerovnostmi), použijeme Větu V.19 (a případné ostré nerovnosti zahrneme do popisu "množiny G" z této věty - viz množiny G_1 a G_2 v popisu H_1 a H_2).
V našem případě lze použít i geometrickou představu: M je uzavřená polokoule, vnitřek M je otevřená polokoule, hranice je povrch - hraniční kruh a hraniční polosféra. H_1 je hraniční kruh bez kružnice; H_2 je hraniční polosféra (polovina povrchu koule) bez ohraničující kružnice; H_3 je zbývající kružnice. Geometrická představa je užitečná, ale ne vždy si lze množinu M snadno představit, proto je vhodné umět postupovat analyticky jako výše.

Totiž [1,1,1]

Funkce $[x, y, z] \mapsto x+y+z$ má na $\mathbb{R}^3$ nenulový gradient, takže v případě množiny H_1 dostaneme body podezřelé z extrému řešením soustavy

$$
\begin{aligned}
yz + \lambda &= 0,\\
xz + \lambda &= 0,\\
xy + \lambda &= 0,\\
x + y + z &= 0.
\end{aligned}
$$

Tedy - vyloučíme lambda. Odečteme druhou rovnici od první a dostaneme z(x-y)=0, tedy buď z=0 nebo x=y. Odečteme druhou rovnici od třetí a dostame x(y-z)=0, tedy buď x=0 nebo y=z. Obě možnosti musí platit zároveň, a tedy dostáváme 4 možnosti: z=0,x=0 nebo z=0,y=z nebo x=y,x=0 nebo x=y,y=z. Ve všech případech dostaneme jediné řešení [0,0,0].

Obdobným postupem jako v předchozím příkladu obdržíme jediné řešení této soustavy $[x, y, z] = [0, 0, 0]$. Tento bod leží v množině H_1, a je tedy bodem podezřelým z extrému.

V případě množiny H_2 má funkce $[x, y, z] \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$ nulový gradient pouze v bodě $[0, 0, 0]$, který není prvkem H_2, takže body podezřelé z extrému dostaneme vyřešením soustavy

gradient je totiž [2x,2y,2z]

$$
\begin{aligned}
yz + 2\lambda x &= 0,\\
xz + 2\lambda y &= 0,\\
xy + 2\lambda z &= 0,\\
x^2 + y^2 + z^2 &= 1.
\end{aligned}
$$

Odečteme druhou rovnici od první, dostaneme (z-2.lambda)(y-x)=0. Odečteme druhou rovnici od třetí, dostaneme (x-2.lambda)(y-z)=0. Z těchto dvou rovností plyne, že x=y nebo y=z nebo x=z. Prozkoumejme první možnost. Pokud x=y, pak první i druhá rovnice mají tvar [*] x(z+2.lambda)=0 a třetí má tvar [**] x^2+2.lambda.z=0. [*] dává, že buď x=0 nebo z=-2.lambda. Možnost x=0 dává body [0,0,1] a [0,0,-1]. Pokud z=-2.lambda, pak [**] lze přepsat jako x^2-z^2=0, tedy x=z nebo x=-z. Možnost x=z dává x=y=z, tedy první a osmý bod. Možnost x=-z dává x=y=-z, tedy čtvrtý a pátý bod. Další možnosti (y=z resp. x=z) jsou zcela analogické.

Obdobným postupem jako v předchozím příkladu obdržíme řešení, přičemž příslušné hodnoty λ neuvádíme:

$$
\left[-\tfrac{1}{\sqrt3}, -\tfrac{1}{\sqrt3}, -\tfrac{1}{\sqrt3}\right], \left[-\tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}\right], \left[\tfrac{1}{\sqrt3}, -\tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}\right], \left[\tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}, -\tfrac{1}{\sqrt3}\right],
$$
$$
\left[-\tfrac{1}{\sqrt3}, -\tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}\right], \left[-\tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}, -\tfrac{1}{\sqrt3}\right], \left[\tfrac{1}{\sqrt3}, -\tfrac{1}{\sqrt3}, -\tfrac{1}{\sqrt3}\right], \left[\tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}\right],
$$
$$
[1,0,0], \quad [-1,0,0], \quad [0,1,0], \quad [0,-1,0], \quad [0,0,1], \quad [0,0,-1].
$$

Z těchto bodů leží v množině H_2 pouze tyto body:

$$
\left[\tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}\right], \quad \left[-\tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}\right], \quad \left[\tfrac{1}{\sqrt3}, -\tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}\right], \quad \left[\tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}, -\tfrac{1}{\sqrt3}\right],
$$
$$
[1,0,0], \quad [0,1,0], \quad [0,0,1].
$$

Rovnost x^2+y^2+z^2=1 splňuje všech 14 nalezených bodů, ale nerovnost x+y+z>0 jen tyto.

Množinu H_3 jsme vyšetřili již v předchozím příkladu. Zde dostáváme podezřelé body

$$
\left[\tfrac{2}{\sqrt6}, -\tfrac{1}{\sqrt6}, -\tfrac{1}{\sqrt6}\right], \quad \left[-\tfrac{1}{\sqrt6}, \tfrac{2}{\sqrt6}, -\tfrac{1}{\sqrt6}\right], \quad \left[-\tfrac{1}{\sqrt6}, -\tfrac{1}{\sqrt6}, \tfrac{2}{\sqrt6}\right],
$$
$$
\left[-\tfrac{2}{\sqrt6}, \tfrac{1}{\sqrt6}, \tfrac{1}{\sqrt6}\right], \quad \left[\tfrac{1}{\sqrt6}, -\tfrac{2}{\sqrt6}, \tfrac{1}{\sqrt6}\right], \quad \left[\tfrac{1}{\sqrt6}, \tfrac{1}{\sqrt6}, -\tfrac{2}{\sqrt6}\right].
$$

Porovnáním hodnot funkce f v podezřelých bodech zjistíme, že funkce f nabývá maxima na M v bodě $\left[\tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}\right]$ a minima na M v bodech $\left[-\tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}\right], \left[\tfrac{1}{\sqrt3}, -\tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}\right], \left[\tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}, -\tfrac{1}{\sqrt3}\right]$. ♣

Připomeňme, že f(x,y,z)=xyz. Tedy f nabývá hodnoty 0 v podezřelých bodech ve vnitřku M, v bodě [0,0,0] (z H_1) a v bodech [1,0,0], [0,1,0] a [0,0,1] (z H_2). Hodnoty v bodech z H_3 jsme spočítali v předchozím příkladu, jsou to 1/(3.odmocnina(6)) a -1/(3.odmocnina(6)). Ve zbývajících bodech z H_2 jsou hodnoty 1/(3.odmocnina(3)) a -1/(3.odmocnina(3)). To jsou největší a nejmenší hodnota.

Poznámka: Podezřelých bodů v tomto příkladu bylo nekonečně mnoho (ve vnitřku M). Ale to nevadilo, s ohledem na to, že ve všech s výjimkou konečně mnoha, byla hodnota nula.