Věta XI.14 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ buď oblast. Pak Ω je oblastí holomorfie $\iff$ $\forall K \subset \Omega$ kompaktní:

$$\hat{K} = \{x \in \Omega;\ \forall f: \Omega \to \mathbb{C} \text{ holomorfní}: |f(x)| \le \sup_{y \in K} |f(y)|\}$$

je opět kompaktní!

Důkaz.

$\Leftarrow$: $\Omega = \mathbb{C}^n \Rightarrow$ je to triviální

Předpokládejme, že $\Omega \neq \mathbb{C}^n$

Nechť $(w_j)_{j=1}^{\infty}$ je hustá posloupnost v Ω, v níž je každý prvek nekonečně krát.

Označme $r_j := \operatorname{dist}(w_j, \mathbb{C}^n \setminus \Omega)$

Dále $\Omega = \bigcup_m K_m$, kde K_m jsou kompaktní, $K_m \subset \operatorname{Int} K_{m+1}$

Pak $\forall m$: $\hat{K}_m$ je kompaktní podmnožina Ω

$\Rightarrow \forall j\ \exists z_j \in U(w_j, r_j) \setminus \hat{K}_j$

[$\operatorname{dist}(\hat{K}_j, \mathbb{C}^n \setminus \Omega) > 0$, zatímco $U(w_j, r_j)$ sahá až k hranici Ω]

Z definice $\hat{K}_j$ existuje f_j holomorfní na Ω, že $|f_j(z_j)| = 1$ a $\sup_{x \in K_j} |f_j|(x) < 1$.

BÚNO $\sup_{x \in K_j} |f_j(x)| < 2^{-j}$

(nahradíme f_j funkcí f_j^m pro $m \in \mathbb{N}$ dost velké.)

Označme $f := \prod_{j=1}^{\infty} (1-f_j)^j$

součin konverguje lokálně stejnoměrně na Ω

(stejnoměrně na K_m pro každé m, protože

pro $j \ge m$ je $|f_j| \le 2^{-j}$ na K_m

a $\sum_{j=1}^{\infty} j\, 2^{-j} < \infty$)

$\Rightarrow f$ je holomorfní na Ω.

Navíc kořeny f jsou jen v bodech, kde má nějaký z činitelů kořen, speciálně f nenulová na K_0

Dále $f(z_j)=0$, dokonce $\frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} f(z_j) = 0$ pro $|\alpha| < j$

Předpokládejme, že $x \in \partial\Omega$, g holomorfní na $P(x,r)$, G komponenta $P(x,r) \cap \Omega$, $f = g$ na G

$x \notin G \Rightarrow G \subsetneq P(x,r)$, G otevřená, $P(x,r)$ souvislá
$\Rightarrow G$ není relativně uzavřená v $P(x,r)$.
Tedy existuje $z \in \partial G \cap P(x,r)$. Pak $z \in \partial\Omega$

Zvolme $\varepsilon > 0$, aby $U(z,\varepsilon) \subset P(x,r)$
zvolme $j_0 \in \mathbb{N}$, aby $w_{j_0} \in U(z, \frac{\varepsilon}{3}) \cap G$. Pak
$r_{j_0} := \operatorname{dist}(w_{j_0}, \mathbb{C}^n \setminus G) \le |w_{j_0} - z| < \frac{\varepsilon}{3}$

$U(w_{j_0}, r_{j_0}) \subset U(z, r_{j_0} + \frac{\varepsilon}{3}) \subset U(z, \frac{2}{3}\varepsilon)$

$\Rightarrow \overline{U(w_{j_0}, r_{j_0})} \subset U(z, \varepsilon) \subset P(x,r)$

w_{j_0} se vyskytuje nekonečně krát v posloupnosti (w_j)

tj. existuje $j_n \nearrow \infty$ $\quad w_{j_n} = w_{j_0}$

Pak $z_{j_n} \in U(w_{j_0}, r_{j_0})$. BÚNO $z_{j_n} \longrightarrow u \in \overline{U(w_{j_0}, r_{j_0})} \subset$
$\subset \mathbb{P}(t, 2)$

Přitom $\frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} g(z_{j_n}) = 0$ pro $|\alpha| \le j_n$

(protože $z_{j_n} \in G$ ... $U(w_{j_0}, r_{j_0}) \subset \Omega \cap \mathbb{P}(t, 1)$
souvislé $\Rightarrow$
je to obsaženo v G)

$\Rightarrow$ v bodě u jsou všechny derivace g nulové $\Rightarrow g \equiv 0$.
spor.

$\Rightarrow$: Nechť Ω je oblast holomorfie, f bude funkce holomorfní na Ω, která o tom svědčí.

$K \subset \Omega$ kompaktní $\Rightarrow \exists\, s > 0\ \forall a \in K\ \ P(a, \vec{s}) \subset \Omega$
$(\vec{s} = (s, s, \dots, s))$

zvolme $r \in (0, s)$

$H := \overline{\bigcup_{a \in K} P(a, \vec{r})}$. Pak H je kompaktní podmnožina Ω.

$M := \sup |f|(H)$

Z Věty 8(4) derivace dle parametru plyne:

$\forall a \in K \quad \forall \alpha$ multiindex:

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{[0,2\pi]^n} \frac{f(a + \hat{r} e^{it})}{r^{|\alpha|+n} (e^{it})^{\alpha+\hat{1}}} (e^{it}) \cdot r^n \cdot \alpha! \, dt$$

$$\left(e^{it} = (e^{it_1}, e^{it_2}, \dots, e^{it_n}) \right)$$

$\Rightarrow \left| \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a) \right| \leq M \cdot \alpha! \, r^{-|\alpha|}$ pro $a \in K$, tedy i pro $a \in \hat{K}$

$\hat{K}$ pomezná množina (souřadnice fukce jsou holomorfní)

Pokud $\hat{K}$ není kompaktní, pak existuje $b \in \partial\Omega \cap \partial\hat{K}$

Najdeme $a \in \hat{K}$, že $P(a, \hat{s}) \ni b$

Uvažme mocninnou řadu o středu a se součtem f.

koeficienty jsou $\frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a)$, což lze odhadnout $M \cdot r^{-|\alpha|}$ ~~pokud~~.

$$\Rightarrow P(a, \hat{r}) \subset B_{\text{řada}}$$

$r \in (0, s)$ libovolné $\Rightarrow P(a, \hat{s}) \subset B_{\text{řada}}$

$\Rightarrow P(a, \hat{s}) \subset D_{\text{řada}}$, tedy f lze rozšířit na $P(a, \hat{s})$, spor.

Důsledek $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ otevřená konvexní $\Rightarrow \Omega$ je oblast holomorfie

[$K \subset \Omega$ kompaktní $\Rightarrow$ co $K \subset \Omega$, kompaktní

$x \in \Omega \setminus \text{co } K \overset{H-B}{\Rightarrow} \exists \alpha \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} \sum \alpha_j x_j > \sup_{y \in \text{co } K} \operatorname{Re} \sum \alpha_j y_j$

Stačí vzít funkci $f(z) = e^{\sum \alpha_j z_j}$]