Věta IX.20 Nechť $p \in [1, \infty]$ a $f \in H^p$

Pak $f^*(e^{it}) = \lim_{r \to 1-} f(re^{it})$ existuje pro s.v. $t \in [-\pi, \pi)$

Navíc platí:

(1) $f^* \in L^p(\mathbb{T})$

(2) $\|f^*\|_p = \|f\|_p$

(3) $f = P[f^*]$

(4) $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f^*(w)}{w - z}\, dw, \quad z \in D$

(kde γ je kladně orientovaná jednotková kružnice)

(5) Pokud $p < \infty$, pak $\lim_{r \to 1-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{it}) - f(re^{it})|^p\, dt = 0$

Důkaz:

$\boxed{A}$ $p = 1$

Lemma 16 $\Rightarrow \exists\ B, g \in H(\mathbb{D})$, $\|B\|_\infty \leq 1$
$g \in H^1$, $f = g \cdot B$, g nenabývá 0 na $\mathbb{D}$
$\|f\|_1 = \|g\|_1$

g nenabývá $0 \Rightarrow \exists\ u \in H(\mathbb{D}) : u^2 = g$
Označme $v := u \cdot B$

Pak $u, v \in H^2$ (protože $|u|^2 \leq |g|$, $|v|^2 \leq |g|$ a $g \in H^1$)

a $f = u \cdot v$

Věta 19 $\Rightarrow$ existují u^*, v^*. Pak $f^* = u^* \cdot v^*$.
Máme tedy existenci f^*

$u^*, v^* \in L^2(\mathbb{T}) \Rightarrow f^* = u^* \cdot v^* \in L^1(\mathbb{T})$
platí tedy (1)

Dále označme $f_r(e^{it}) = f(re^{it})$, $e^{it} \in \mathbb{T}$, $r \in [0,1)$
podobně u_r, v_r

Máme $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_r - f^*| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u_r \cdot v_r - u^* \cdot v^*|$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u_r - u^*||v_r| + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u^*||v_r - v^*| \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\le}$$

$$\le \underbrace{\|u_r - u^*\|_2}_{\to 0 \text{ V19(4)}} \cdot \underbrace{M_2(v, r)}_{\le \|v^*\|_2} + \|u^*\|_2 \underbrace{\|v_r - v^*\|_2}_{\to 0 \text{ V19(4)}} \xrightarrow{r \to 1-} 0$$

Tím je dokázáno (5). Odtud plyne i (2),
protože $\|f^*\|_1 = \lim_{r\to 1-} \|f_r\|_1 = \lim_{r \to 1-} M_1(f, r) = \|f\|_1$

Zbývá (3) a (4) Podobně jako ve 4. kroku důkazu V19

dostaneme pro $z \in \mathbb{D}$ a $s \in (0,1)$: $|f(sz) - P[f^*](z)| \le \|P_r\|_\infty \cdot \underbrace{\|f_s - f^*\|_1}_{\to 0}$
$(z = re^{i\theta})$

a podobně jako v 6. kroku:

$$\left|f(sz) - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f^*(w)}{w-z}\right| \le \frac{1}{1-|z|} \cdot \|f_s - f^*\|_1 \to 0$$

$\boxed{B}$ $p \in (1,\infty)$. Protože $H^p \subset H^1$, z bodu $\boxed{A}$

pro $f \in H^p$ existuje f^* a platí (3) a (4)

Navíc platí dle bodu (5), že $f_r \xrightarrow{r\to 1-} f^*$ v L^1

Protože $f \in L^p$, je $(f_r)_{r\in(0,1)}$ omezená v $L^p(\mathbb{T})$

Prostor $L^p(\mathbb{T})$ je reflexivní, tedy

$$\exists r_n \nearrow 1 \quad f_{r_n} \xrightarrow{w} g \in L^p(\mathbb{T})$$

tj. $\forall h \in L^q(\mathbb{T}) \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$

$$\int f_{r_n} h \to \int g h$$

protože $L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^q(\mathbb{T})$, plyne z toho, že

$$f_{r_n} \xrightarrow{w} g \text{ v } L^1(\mathbb{T})$$

Protože $f_{r_n} \xrightarrow{\|\ \|} f^*$ v $L^1(\mathbb{T})$, dostáváme $f^* = g$, tedy $f^* \in L^p(\mathbb{T})$, platí (1)

Protože (2) plyne snadno z (5), zbývá dokázat (5).

<u>Důkaz (5):</u> Dokážeme pomocné tvrzení:

$$(0) \quad \forall \delta \in (0,\pi): \int_{-\pi}^{-\delta} P_r + \int_{\delta}^{\pi} P_r \xrightarrow{r\to 1-} 0$$

$$\Big[\quad P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} \le \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta + r^2} \xrightarrow{r\to 1-} 0$$

$\delta \le |t| \le \pi \Rightarrow \cos t \le \cos\delta$

Tedy $P_r \rightrightarrows 0$ pro $r \to 1-$ na $[-\pi,-\delta] \cup [\delta,\pi]$ $\quad \Big]$

($\square$) Nech $g \in L^p(\mathbb{T})$. Pro $t \in \mathbb{R}$ nech $g_t(e^{i\theta}) = g(e^{i(\theta - t)})$

Pak $\|g_t - g\|_p \xrightarrow{t \to 0+} 0$

Γ • g spojitá na $\mathbb{T}$

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 : |t| < \delta \Rightarrow \forall \theta \in [-\pi, \pi) \; |g(e^{i\theta}) - g(e^{i(\theta - t)})| < \varepsilon$

(ze stejnoměrné spojitosti)

Pak pro $|t| < \delta$ je

$$\|g_t - g\|_p^p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(e^{i(\theta - t)}) - g(e^{i\theta})|^p \, d\theta$$

$$\leq \varepsilon^p$$

Tedy opravdu $\|g_t - g\|_p \to 0$ pro $t \to 0+$

• g obecná funkce z $L^p(\mathbb{T})$

$\varepsilon > 0 \;\dots\; \exists\, h \in C(\mathbb{T}) : \|h - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$

$\exists\, \delta > 0 \;\forall\, |t| < \delta : \|h_t - h\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$

pak pro $|t| < \delta$: $\|g_t - g\|_p \leq \underbrace{\|g_t - h_t\|_p}_{= \|g - h\|_p < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|h_t - h\|_p}_{< \frac{\varepsilon}{3}}$

$+ \underbrace{\|h - g\|_p}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$

$\lrcorner$

Počítejme: $\|f_r - f\|_{L^p} \overset{f=P[f^*]}{=} \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) \left(f^*(e^{it}) - f^*(e^{i\theta})\right) dt \right\|_{L^p}$

$= \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(u) \left(f^*(e^{i(\theta-u)}) - f^*(e^{i\theta})\right) du \right\|_{L^p} \underset{(\delta \in (0,\pi) \text{ vhodné})}{\leq}$

substituce $u = \theta - t$ $(t = \theta - u)$

$\leq \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} P_r(u) \left(f^*(e^{i(\theta-u)}) - f^*(e^{i\theta})\right) du \right\|_{L^p} + \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \dots \right\|_{L^p} + \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \dots \right\|_{L^p}$

Odhadneme tyto tři sčítance postupně: (q sdružený exponent $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(u) \left(f^*(e^{i(\theta-u)}) - f^*(e^{i\theta})\right) du \right\|_{L^p} =$

$= \sup_{\substack{g \in L^q(\mathbb{T}) \\ \|g\|_q \leq 1}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta}) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(u) \left(f^*(e^{i(\theta-u)}) - f^*(e^{i\theta})\right) du \right) d\theta \right|$

$(L^p)^* = L^q$ duální vyjádření normy

$\underset{\text{FUBINI}}{=} \sup_g \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(u) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta}) \left(f^*(e^{i(\theta-u)}) - f^*(e^{i\theta})\right) d\theta \right) du \right|$

$\leq \sup_g \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(u) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta}) \left(f^*(e^{i(\theta-u)}) - f^*(e^{i\theta})\right) d\theta \right| du$

$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(u) \|f^*_u - f^*\|_p \, du$

Analogicky $\left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} \dots \right\|_{L^p} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} P_r(u) \|f^*_u - f^*\|_p \, du$

$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \dots \right\|_{L^p} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} P_r(u) \|f^*_u - f^*\|_p \, du$

$\varepsilon > 0$ ... dle ($\square$) existuje $\delta > 0$, až

pro $|u| < \delta$ platilo $\|f^* - f^*_u\|_p < \varepsilon$

Pak zvolme tato δ, dle předchozího výpočtu:

$$\|f_r - f^*\|_p \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(u) \|f^*_u - f^*\| du + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} P_r(u) \|f^*_u - f^*\|_p du$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} P_r(u) \|f^*_u - f^*\|_p du \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(u) \cdot \varepsilon + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} P_r(u) \cdot 2\|f^*\|_p du$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} P_r(u) 2\|f^*\|_p du \leq \varepsilon + 2\|f^*\|_p \cdot \frac{1}{2\pi} \underbrace{\left(\int_{-\pi}^{-\delta} P_r + \int_{\delta}^{\pi} P_r \right)}_{\xrightarrow{r \to 1-} 0 \text{ dle } (0)}$$

Tedy $\limsup_{r \to 1-} \|f_r - f^*\|_p \leq \varepsilon$

ε libovolné $\Rightarrow$ limita je 0, důkaz (5) je hotov.

$\boxed{C}$ $p = \infty$ $\Rightarrow$ f^* existuje z Fatouovy věty
Fatouova věta zaručuje důkaz (1), (2), (4)
Bod (3) pak plyne z Věty 10.