Věta IX.18

$\boxed{1}$ $p \in [1,\infty] \Rightarrow (H^p, \| \|_p)$ je Banachův prostor

• $p = \infty$: $(f_n) \subset H^\infty$ $\| \|_\infty$ - cauchy $\Rightarrow$
(f_n) stejnoměrně cauchy $\Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ pro nějaké f.

Weierstrass $\Rightarrow f$ holomorfní
Dále f omezená
$\Rightarrow f \in H^\infty$, $f_n \to f$ v H^∞

$\boxed{2}$ • $p \in [1,\infty)$
$\| \|_p$ je norma (z vlastností L^p prostorů)

Buď $(f_n) \subset H^p$ $\| \cdot \|_p$ - cauchyovská. Pak

(a) L 17 $\Rightarrow$ $\forall r \in (0,1)$ je (f_n) stejnoměrně cauchyovská na $\overline{U(0,r)}$. Tedy existuje f, že $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $U(0,1)$. Z Weierstrassovy věty je f holomorfní.

(b) $r \in (0,1)$ pevné
$f_n^r(e^{it}) = f_n(re^{it})$ $\quad (e^{it} \in \mathbb{T})$
$f^r(e^{it}) = f(re^{it})$

Pak: $f_n^r \to f^r$ bodově
(f_n^r) je cauchyovská v $L^p(\mathbb{T})$, $L^p(\mathbb{T})$ úplný
$\Rightarrow f_n^r \xrightarrow{L^p} g$ pro nějaké $g \in L^p(\mathbb{T})$
Existuje vybraná, co konverguje s.v. $\Rightarrow g = f^r$ s.v.,

tedy $f_n^r \xrightarrow{n} f^r$ v L^p, neboli
$M_p(f_n - f, r) \xrightarrow{n} 0$

(c) speciálně $M_p(f, r) = \lim_n M_p(f_n, r) \leq \sup_n \|f_n\|_p$

~~R~~ (f_n) je cauchyovská, tedy omezená $\Rightarrow f \in H^p$

(d) $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ existuje n_0, že pro $m, n \geq n_0$: $\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon$

zvolme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ a $r \in (0,1)$. Pak

$\forall m \geq n$:

$$M_p(f_n - f_m, r) \leq \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

$$\Big\downarrow m \to \infty$$

$$M_p(f_n - f, r) \quad \Rightarrow \quad M_p(f_n - f, r) \leq \varepsilon$$

pro $n \geq n_0$, $r \in (0,1)$

$\Rightarrow \|f_n - f\|_p \leq \varepsilon$ pro $n \geq n_0$

Tedy $f_n \to f$ v $\| \ \|_p$.

$\boxed{2}$ $p \in (0,1) \Rightarrow \varrho_p(f, g) = \|f - g\|^p$ definuje úplnou metriku na H^p

- je to metrika (známá vlastnost L^p prostorů pro $p < 1$, plyne z nerovnosti $(a+b)^p \leq a^p + b^p$, $a, b \geq 0$)

Důkaz postupujeme stejně jako v případě $p \in [1, \infty)$
- použijeme druhý bod Lemmatu 17 v (a)
- použijeme úplnost L^p pro $p < 1$ v (b)
- v (c), (d) používáme ϱ_p místo $\| \ \|_p$.