Lemma IX.11 $G \subset \mathbb{C}$ omezená jednoduše souvislá oblast, $f: G \xrightarrow{na} U(0,1)$ konformní. Nechť $\varphi: [0,1] \to \mathbb{C}$ je křivka, $\varphi([0,1)) \subset G$, $\varphi(1) \in \partial G$. Pak existuje $\lim_{t \to 1-} f(\varphi(t))$ a leží na jednotkové kružnici.

Dk:

1. krok $\lim_{t \to 1-} |f(\varphi(t))| = 1$

⌈ Nechť NE. Pak existuje posloupnost (t_k), $t_k \nearrow 1$
$|f(\varphi(t_k))| \to \alpha \in [0,1)$

Dále existuje vybraná (t_{k_n}), že $f(\varphi(t_{k_n})) \to z$, kde $|z| = \alpha$

Pak ovšem $\varphi(t_{k_n}) \to f^{-1}(z) \in G$ ↯
zároveň $\varphi(t_k) \to \varphi(1) \in \partial G$ ⌋

2. krok $M := \bigcap_{t \in [0,1)} \overline{f(\varphi([t,1)))} = \{z \in \mathbb{C};\ \exists\, t_n \nearrow 1: f(\varphi(t_n)) \to z\}$

Dle 1. kroku je $M \subset \mathbb{T}$. Zřejmě $M \neq \emptyset$ (průnik centrovaného systému kompaktních množin)

M souvislá (průnik řetězce kompaktních souvislých množin)

$f(\varphi([t,1)))$ souvislá (spojitý obraz intervalu)
$\Rightarrow \overline{f(\varphi([t,1)))}$ souvislá (uzávěr souvislé)
U, V disjunktní otevřené $M \subset U \cup V$, M protíná U i V
$\Rightarrow \exists\, t: \overline{f(\varphi([t,1)))} \subset U \cup V$ ... spor

Tedy buď M je 1 bod nebo M je oblouk.

3. krok Nechť $M \supset \{e^{it};\ t \in [\alpha, \beta]\}$, kde $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$

Pak pro všechna $\vartheta \in (\alpha, \beta)$ s výjimkou nejvýše jednoho platí $\{re^{i\vartheta};\ r \in (0,1)\} \cap f(\varphi([t,1))) \neq \emptyset$ pro všechna $t \in [0,1)$

⌈ Nechť ϑ_1, ϑ_2, kde $\vartheta_1 < \vartheta_2$, jsou dvě výjimky.

zvolme $t_1 \in [0,1)$, že $f(\varphi([t_1,1))) \cap \{re^{i\vartheta_1}, r \in (0,1)\} = \emptyset$

$t_2 \in [0,1)$, že $f(\varphi([t_2,1))) \cap \{re^{i\vartheta_2}, r \in (0,1)\} = \emptyset$

$t_3 \in (0,1)$, že pro $t \in [t_3, 1)$ je $|f(\varphi(t))| > 1/2$

(to lze díky 1. kroku)

$t_0 := \max\{t_1, t_2, t_3\}$

$\Omega_1 := \{re^{i\theta};\ r \in (\frac{1}{2}, 1),\ \theta \in (\vartheta_1, \vartheta_2)\}$

$\Omega_2 := \{re^{i\theta};\ r \in (\frac{1}{2}, 1),\ \theta \in (\vartheta_2, 2\pi + \vartheta_1)\}$

$\Rightarrow \Omega_1, \Omega_2$ otevřené disjunktní, $f(\varphi([t_0,1))) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$

$\Rightarrow$ buď $f(\varphi([t_0,1))) \subset \Omega_1$. Pak ovšem $M \subset \{e^{it}, t \in [\vartheta_1, \vartheta_2]\}$

nebo $f(\varphi([t_0,1))) \subset \Omega_2$. Pak $M \cap \{e^{it};\ t \in (\vartheta_1, \vartheta_2)\} = \emptyset$

Obě možnosti vedou ke sporu s předpokladem. ⌋

4. krok Z 3. kroku víme, že pro všechna $\vartheta \in (\alpha, \beta)$ až na jednu existuje $t_n \nearrow 1$ $f(\varphi(t_n)) \in \{re^{i\vartheta}, r \in (0,1)\}$, tedy $f(\varphi(t_n)) \to e^{i\vartheta}$

pak $f^{-1}(f(\varphi(t_n))) = \varphi(t_n) \to \varphi(1)$

Z Fatouovy věty pro s.v. $\vartheta \in [0, 2\pi)$ existuje $\lim_{r \to 1-} f^{-1}(re^{i\vartheta})$

tedy pro s.v. $\vartheta \in (\alpha, \beta)$ je $\lim_{r \to 1-} f^{-1}(re^{i\vartheta}) = \varphi(1)$

Aplikací důsledku Fatouovy věty na $f^{-1} - \varphi(1)$ vidíme, že f^{-1} je konstantní. To je spor. Proto M je 1 bod a důkaz je hotov.