II.1 Analytické pokračování

Definice. **Analytickým elementem** rozumíme uspořádanou dvojici (f, D), kde $D \subset \mathbb{C}$ je otevřený kruh a f je funkce holomorfní na D. **Středem elementu** (f, D) rozumíme střed kruhu D.

Poznámka. Někdy se analytický element definuje jiným způsobem – jako dvojice (f, D), kde D je otevřený kruh, $f \in H(D)$ a přitom D je kruhem konvergence Taylorovy řady funkce f (se středem ve středu kruhu D); nebo jako dvojice (f, z), kde $z \in \mathbb{C}$ a f je funkce holomorfní na nějakém okolí bodu z. Všechny tři přístupy jsou ekvivalentní, ale následné definice a tvrzení je třeba formulovat jinak. Budeme se držet výše uvedené definice.

Definice.

- Analytický element (f_2, D_2) se nazývá **přímým pokračováním** elementu (f_1, D_1), pokud $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ a pro každé $z \in D_1 \cap D_2$ platí $f_1(z) = f_2(z)$. Pokud navíc mají kruhy D_1 a D_2 týž střed, říkáme, že elementy (f_1, D_1) a (f_2, D_2) jsou **stejné**.
- Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast. Analytický element (f, D) se nazývá **analytickým pokračováním elementu** (f_0, D_0) **v oblasti** Ω, pokud existují analytické elementy $(f_1, D_1), \dots, (f_n, D_n)$ takové, že platí
  - $D = D_n$ a $f = f_n$,
  - (f_k, D_k) je přímým pokračováním (f_{k-1}, D_{k-1}) pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$,
  - $D_k \subset \Omega$ pro každé $k \in \{0, \dots, n\}$.

Poznámky:

(1) Dva elementy jsou stejné, pokud jde o tytéž elementy v některém z alternativních pohledů zmíněných výše. Tato terminologie je trochu zavádějící, ale budeme ji několikrát potřebovat.

(2) Relace „být přímým pokračováním“ je symetrická, ale nikoli tranzitivní. Podrobněji: Nechť (f_2, D_2) je přímým pokračováním (f_1, D_1) a (f_3, D_3) je přímým pokračováním (f_2, D_2). Pak mohou nastat následující případy:
   - $D_1 \cap D_3 = \emptyset$. Pak (f_3, D_3) není přímým pokračováním (f_1, D_1).
   - I když $D_1 \cap D_3 \neq \emptyset$, (f_3, D_3) nemusí být přímým pokračováním (f_1, D_1). Funkce f_1 a f_3 se totiž nemusí shodovat na $D_1 \cap D_3$.
   - Pokud $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \neq \emptyset$, pak (f_3, D_3) je přímým pokračováním (f_1, D_1).

(3) Relace „být analytickým pokračováním v oblasti Ω“ je ekvivalence.

Definice. Nechť (f_0, D_0) je analytický element a $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ je spojitá křivka, přičemž $\gamma(0)$ je střed kruhu D_0. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast.

- Analytický element (f, D) se nazývá **analytickým pokračováním** (f_0, D_0) **podél** γ **v oblasti** Ω, jestliže $\gamma(1)$ je středem kruhu D a navíc existují analytické elementy $(f_1, D_1), \dots, (f_n, D_n)$ a dělení
  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ intervalu $[0, 1]$ tak, že platí:

- $D = D_n$ a $f = f_n$,
- (f_k, D_k) je přímým pokračováním (f_{k-1}, D_{k-1}) pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$,
- $D_k \subset \Omega$ pro každé $k \in \{0, \dots, n\}$,
- $\gamma([s_k, s_{k+1}]) \subset D_k$ pro každé $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

- Říkáme, že analytický element (f_0, D_0) **má analytické pokračování podél** γ **v oblasti** Ω (nebo také, že jej **lze analyticky pokračovat podél** γ **v oblasti** Ω), jestliže existuje analytický element (f, D), který je jeho analytickým pokračováním podél γ v oblasti Ω.

Věta 1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, (f_0, D_0) je analytický element a $\gamma : [0,1] \to \Omega$ je spojitá křivka, přičemž $\gamma(0)$ je střed kruhu D_0. Pak existuje nejvýše jedno analytické pokračování (f_0, D_0) podél γ. Přesněji: Jsou-li (f_1, D_1) a (f_2, D_2) dvě taková pokračování, pak tyto dva elementy jsou stejné.*

Definice. **Analytickou funkcí v oblasti** Ω rozumíme třídu ekvivalence analytických elementů při ekvivalenci „být analytickým pokračováním v oblasti Ω“.

Definice. Nechť $\boldsymbol{f}$ je analytická funkce v oblasti Ω.

- **Definičním oborem** $\boldsymbol{f}$ rozumíme sjednocení všech otevřených kruhů D, pro které existuje $f \in H(D)$ splňující $(f, D) \in \boldsymbol{f}$. Definiční obor $\boldsymbol{f}$ budeme značit $\mathrm{dom}(\boldsymbol{f})$.
- Nechť $a \in \mathrm{dom}(\boldsymbol{f})$. **Množinou hodnot** $\boldsymbol{f}$ **v bodě** a rozumíme množinu
$$\boldsymbol{f}(a) = \{z \in \mathbb{C} : \exists (f, D) \in \boldsymbol{f} : a \in D \;\&\; f(a) = z\}.$$
- Nechť $G \subset \mathrm{dom}(\boldsymbol{f})$ je oblast. **Větví** $\boldsymbol{f}$ **v množině** G rozumíme každou analytickou funkci $\boldsymbol{g}$ v G, která je podmnožinou $\boldsymbol{f}$.

Věta 2 (Poincaré-Volterra). *Nechť $\boldsymbol{f}$ je analytická funkce v oblasti Ω a $a \in \mathrm{dom}(\boldsymbol{f})$. Pak existuje nejvýše spočetně mnoho analytických elementů o středu a, z nichž žádné dva nejsou stejné, a všechny patří do $\boldsymbol{f}$. Speciálně, množina $\boldsymbol{f}(a)$ je nejvýše spočetná.*

Definice. Nechť $\boldsymbol{f}$ je analytická funkce v oblasti Ω a $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

- Nechť $a \in \mathrm{dom}(\boldsymbol{f})$. Říkáme, že $\boldsymbol{f}$ je p-**značná v bodě** a, jestliže existuje právě p elementů o středu a, které patří do $\boldsymbol{f}$ a žádné dva z nich nejsou stejné (tj. existuje jich p a v případě, že $p \in \mathbb{N}$, jich neexistuje $p+1$).
- Říkáme, že $\boldsymbol{f}$ je **přesně** p-**značná**, pokud je p-značná v každém bodě $a \in \mathrm{dom}(\boldsymbol{f})$.
- Říkáme, že $\boldsymbol{f}$ je p-**značná**, pokud
$$p = \sup\{q \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} : \exists a \in \mathrm{dom}(\boldsymbol{f}), \boldsymbol{f} \text{ je } q\text{-značná v bodě } a\}.$$

(1) 1-značné funkce nazýváme **jednoznačné**.

Poznámka. Je-li $\boldsymbol{f}$ p-značná v bodě a, pak množina $\boldsymbol{f}(a)$ má nejvýše p prvků. Může mít méně než p prvků.

Poznámka. V případě, že $\Omega = \mathbb{C}$, říkáme místo „analytické pokračování v $\mathbb{C}$“ pouze **analytické pokračování**. Podobně říkáme jen **analytické pokračování podél** γ nebo **analytická funkce**.