

Zkouška z Komplexní analýzy 1 (VZOR)

LS 2013-2014

Příklad 1: Rozložte funkci $\cot g^2 z$ na „parciální zlomky“. (Použijte Cauchyovu metodu, tj. Větu VI.21 z přednášky.)

Příklad 2: Dokažte Větu VII.7' z přednášky, tj. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $M \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus G$ a $c : M \rightarrow \{1, \infty\}$. Předpokládejme, že každá komponenta množiny $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ obsahuje buď hromadný bod množiny M nebo takové $m \in M$, pro které je $c(m) = \infty$. Nechť Y je množina všech racionálních funkcí s póly jen v bodech množiny M ; přičemž, je-li $c(m) = 1$, je násobnost pólu v bodě m nejvýše 1. Pak Y je hustá v $H(G)$.*

Návod:

- Zformulujte analogickou větu pro funkce holomorfní na kompaktní množině K . (Tj. příslušnou analogii Věty VII.7 z přednášky).
- Popište, jak se pro důkaz zformulované věty použije Hahn-Banachova věta.
- Nechť L je spojitý lineární funkcionál na $C(K)$. Popište, jak se definuje mu příslušná funkce g holomorfní na $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ splňující $g(\infty) = 0$ a co pro ni platí.
- Ukažte, že je-li $L(h) = 0$ pro každou racionální funkci h splňující podmínky uvedené ve větě, je funkce g konstantně rovna nule. (Použijte větu o jednoznačnosti na každé komponentě $\mathbb{C} \setminus G$, předpoklad na L a to, jak g reprezentuje L .)
- Dokončete důkaz věty zformulované v bodě (a).
- Ukažte, jak z věty formulované v bodě (a) plyne požadovaná věta. (Analogicky jako v důkazu Věty VII.7' z přednášky použijte vyčerpání kompakty (Lemma VII.2), ukažte, že každý z kompakťů K_n splňuje předpoklady věty z bodu (a) a tu použijte.)

Příklad 3: Nechť $G = U(0, 1) \setminus [0, 1)$. Najděte konformní (tj. prosté holomorfní) zobrazení G na $U(0, 1)$.

Návod:

- Vyšetřete, kde je holomorfní a prostá funkce $m_{1/2}$ a kam zobrazuje množinu $U(0, 1) \setminus (-1, 0]$.
- Dokažte, že Žukovského funkce $g(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ zobrazuje půlkruh $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ a } \operatorname{Im} z > 0\}$ na polorovinu $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$. (Rozmyslete si, kam se zobrazuje hranice. To můžete využít při řešení.)
- Najděte lineární lomené zobrazení, které zobrazuje uvedenou polorovinu na $U(0, 1)$.
- Zkombinujte dosažené výsledky a dokončete řešení.

Orientační hodnocení:

Na vypracování jsou 3 hodiny. Ke složení zkoušky je třeba vyřešit alespoň 50%, na známku velmi dobře alespoň 60%, na známku výborně alespoň 75%. Tyto hodnoty jsou orientační, případné nejasnosti je možné vyjasnit v rámci následného ústního pohovoru.