

VI.4 Rouchéova věta a její důsledky

Věta 8 (princip argumentu). Necht' $G \subset \mathbb{C}$ je oblast, Γ cykl takový, že $\langle \Gamma \rangle \subset G$ a pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus G$ je $\text{ind}_\Gamma a = 0$. Necht' $f \in M(G)$ na $\langle \Gamma \rangle$ nabývá jen konečných nenulových hodnot. Je-li $a \in G$ kořenem funkce f , označme $N_f(a)$ jeho násobnost. Má-li funkce f v bodě $a \in G$ pól, označme $P_f(a)$ jeho násobnost. Pak platí:

$$\begin{aligned} \sum_{a \in G, f(a)=0} N_f(a) \cdot \text{ind}_\Gamma a - \sum_{a \in G, f(a)=\infty} P_f(a) \cdot \text{ind}_\Gamma a &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i} \Delta_\Gamma \log f. \end{aligned}$$

Věta 9 (Rouchéova věta pro cykl). Necht' $G \subset \mathbb{C}$ je oblast, Γ cykl takový, že $\langle \Gamma \rangle \subset G$ a pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus G$ je $\text{ind}_\Gamma a = 0$. Necht' $f, g \in M(G)$ splňují pro každé $z \in \langle \Gamma \rangle$

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|.$$

Pak (při značení z Věty 8)

$$\begin{aligned} \sum_{a \in G, f(a)=0} N_f(a) \cdot \text{ind}_\Gamma a - \sum_{a \in G, f(a)=\infty} P_f(a) \cdot \text{ind}_\Gamma a &= \\ &= \sum_{a \in G, g(a)=0} N_g(a) \cdot \text{ind}_\Gamma a - \sum_{a \in G, g(a)=\infty} P_g(a) \cdot \text{ind}_\Gamma a. \end{aligned}$$

Důsledek 10. Necht' $a \in \overline{\mathbb{C}}$, $R > 0$, f je holomorfní na $U(a, R)$, $b = f(a)$ a funkce $f - b$ má v bodě a kořen násobnosti $p \in \mathbb{N}$ (tj. f **nabývá své hodnoty v bodě a p -násobně**). Pak existuje $r \in (0, R)$ a $\rho > 0$ tak, že pro každé $w \in P(b, \rho)$ f nabývá hodnoty w v právě p různých bodech z $U(a, r)$.

Důsledek 11. Necht' $a \in \overline{\mathbb{C}}$, $R > 0$, f je holomorfní na $P(a, R)$ a má v bodě a pól násobnosti $p \in \mathbb{N}$. Pak existuje $r \in (0, R)$ a $M > 0$ tak, že pro každé $w \in \mathbb{C}$, $|w| > M$, f nabývá hodnoty w v právě p různých bodech z $P(a, r)$.

Věta 12 (věta o otevřeném zobrazení). Necht' $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ je oblast a f je nekonstantní meromorfní funkce na Ω . Pak f je otevřené zobrazení, tj. $f(G)$ je otevřená podmnožina $\overline{\mathbb{C}}$ pro každou $G \subset \Omega$ otevřenou.

Věta 13 (věta o lokální existenci inverzní funkce). Necht' f je funkce holomorfní na okolí bodu $a \in \mathbb{C}$ a $f'(a) \neq 0$. Pak existuje $r > 0$ s následujícími vlastnostmi:

- (i) f je prostá na $U(a, r)$;
- (ii) $G = f(U(a, r))$ je otevřená množina;
- (iii) inverzní funkce f^{-1} je holomorfní na G a pro každé $z \in G$ platí

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}.$$

Věta 14. Necht' f je funkce meromorfní na otevřené množině $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$. Označme $M = \{a \in \Omega : f(a) = \infty\}$. Předpokládejme, že f je prostá na $\Omega \setminus M$. Pak množina M obsahuje nejvýše jeden bod a , pokud nějaký obsahuje, je v něm pól násobnosti 1. Navíc pro každé $z \in (\Omega \cap \mathbb{C}) \setminus M$ je $f'(z) \neq 0$, f je prostá na Ω a inverzní funkce $k f$ je meromorfní na $f(\Omega)$.

Věta 15 (cykl okolo kompaktu). Necht' $G \subset \mathbb{C}$ je neprázdňá otevřená množina a $K \subset G$ je kompaktní množina. Pak existuje cykl Γ , pro který platí

- (i) $\langle \Gamma \rangle \subset G \setminus K$,
- (ii) $\text{ind}_{\Gamma} z = 1$ pro $z \in K$,
- (iii) $\text{ind}_{\Gamma} z = 0$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus G$.
- (iv) Index vzhledem k Γ nabývá jen hodnot 0 nebo 1.

Poznámka. Necht' G , K a Γ jsou jako ve Větě 15. Pak pro každou $f \in H(G)$ platí

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad z \in K.$$

Věta 16 (Rouchéova věta pro kompakt). Necht' $K \subset \mathbb{C}$ je kompaktní množina a $\Omega = \text{Int } K$. Necht' f, g jsou spojité funkce definované na K s hodnotami v $\overline{\mathbb{C}}$, které jsou meromorfní na Ω . Předpokládejme, že pro každé $z \in \partial K$ platí $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$. Pak (při značení z Věty 8)

$$\sum_{a \in \Omega, f(a)=0} N_f(a) - \sum_{a \in \Omega, f(a)=\infty} P_f(a) = \sum_{a \in \Omega, g(a)=0} N_g(a) - \sum_{a \in \Omega, g(a)=\infty} P_g(a).$$