

VI.1 Řetězce a cykly

Definice. Řetězcem rozumíme výraz tvaru

$$(*) \quad \varphi_1 \dot{+} \varphi_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \varphi_n,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ jsou cesty. Řetězec $(*)$ se nazývá **cykl**, pokud jsou cesty $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ uzavřené.

Nechť Γ je řetězec tvaru $(*)$. Pak definujeme

- **obraz řetězce Γ jako**

$$\langle \Gamma \rangle = \langle \varphi_1 \rangle \cup \langle \varphi_2 \rangle \cup \cdots \cup \langle \varphi_n \rangle;$$

- **délku řetězce Γ jako**

$$V(\Gamma) = V(\varphi_1) + V(\varphi_2) + \cdots + V(\varphi_n);$$

- je-li $f : \langle \Gamma \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá, pak **integrál funkce f podél Γ jako**

$$\int_{\Gamma} f = \int_{\varphi_1} f + \int_{\varphi_2} f + \cdots + \int_{\varphi_n} f;$$

- je-li $f : \langle \Gamma \rangle \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ spojitá, pak **přírůstek logaritmu funkce f podél Γ jako**

$$\Delta_{\Gamma} \log f = \Delta_{\varphi_1} \log f + \Delta_{\varphi_2} \log f + \cdots + \Delta_{\varphi_n} \log f.$$

Je-li Γ cykl a $a \in \mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$, pak **index bodu a vzhledem k cyklu Γ je**

$$\text{ind}_{\Gamma} a = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z - a} dz.$$

Jsou-li Γ_1 a Γ_2 dva řetězce, řekneme, že jsou **ekvivalentní**, jestliže $\langle \Gamma_1 \rangle = \langle \Gamma_2 \rangle$ a pro každou spojitou $f : \langle \Gamma_1 \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ platí $\int_{\Gamma_1} f = \int_{\Gamma_2} f$.

Poznámky.

- (1) Je-li Γ cykl tvaru $(*)$ a $a \in \mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$, pak

$$\text{ind}_{\Gamma} a = \text{ind}_{\varphi_1} a + \text{ind}_{\varphi_2} a + \cdots + \text{ind}_{\varphi_n} a.$$

- (2) Nechť $\varphi_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ a $\varphi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ jsou cesty, pro které $\varphi_1(b) = \varphi_2(c)$. Pak jejich spojení $\varphi_1 \dot{+} \varphi_2$ je ekvivalentní řetězci $\varphi_1 \dot{+} \varphi_2$.
- (3) Pro index bodu vzhledem k cyklu platí zřejmé analogie Věty III.11 a propichovací věty (Poznámka (3) za Větou III.11).